

Analytical Solution for Solving Strain and Stress  
of E-Type Membrane of a Triaxial Linear AccelerometerQIAN Peng-an<sup>1,2,3\*</sup>, MENG Ming<sup>1,2</sup>, WU Zhong-cheng<sup>1</sup>, GE Yun-jian<sup>1</sup>

- |  |
|--|
| 1. Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China;               |
| 2. Institute of Intelligent Machines, Chinese Academy of Science, Hefei 230031, China;                         |
| 3. School of Computer Science and Information Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China |

**Abstract:** A triaxial linear accelerometer based on E-type membrane has been designed. For the design, it is essential to characterize the strain and stress of the sensing element, which is an annular flat membrane in E-type structure. Considering the size and slight deformation of the membrane, it can be regarded as a flat plate with slight deflection. Consequently, analyses of the membrane can be performed under acceleration load  $a_z, a_x (a_z)$  and corresponding boundary condition respectively. The analytical solutions of the strain and stress are obtained from the elastic surface differential equations about the axisymmetric/non-axisymmetric deformation of circular plate.

**Key words:** triaxial linear accelerometer; strain and stress; E-type membrane; analytical solutions  
**EEACC:** 7230; 7320E

## 三轴线加速度计 E 膜片弹性体应力应变解析法研究

钱朋安<sup>1,2,3\*</sup>, 孟明<sup>1,2</sup>, 吴仲城<sup>1</sup>, 葛运建<sup>1</sup>

- |                               |
|-------------------------------|
| 1. 中国科学院合肥智能机械研究所, 合肥 230031; |
| 2. 中国科技大学自动化系, 合肥 230026;     |
| 3. 合肥工业大学计算机与信息学院, 合肥 230009  |

**摘要:** 基于 E 型膜片已设计出一种三轴线加速度计; 此 E 型膜片的敏感弹性部分为圆环平膜片, 对其应力应变特性的分析至关重要。考虑到 E 膜片的实际尺寸及测量时其变形较小, 将 E 膜片变形作为薄板小挠度变形来对待, 对  $z, x(y)$  各轴向加速度载荷  $a_z, a_x (a_z)$  作用下, 膜片的边界条件进行分析; 并参考圆薄板轴对称/反轴对称变形的弹性曲面微分方程及通解, 获得 E 膜片的应力应变解析解。

**关键词:** 三轴线加速度计, 应力应变, E 型膜片, 解析法

**中图分类号:** TP212.1

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1004-1699(2006)04-1103-04

加速度作为描述物体运动状态的一个重要物理量, 已广泛应用于社会生产实践的各个方面。加速度信号的获取主要是通过相应的加速度传感器来实现。而在实际工程应用中, 如汽车安全防护、电梯舒

适度测量等, 常常需要高灵敏度、低量程、低成本的三维加速度传感器。

中科院合肥智能机械研究所, 利用目前比较成熟的应变片式传感器技术与微处理器嵌入式系统,

**收稿日期:** 2005-09-22

**基金项目:** 国家自然科学基金项目资助(60343006)

**作者简介:** 钱朋安(1966-), 男, 中国科技大学博士研究生、合肥工业大学教师(通讯联系人), 研究领域为传感器技术、信息获取与处理, [lipingqian@sohu.com](mailto:lipingqian@sohu.com).

设计出一种新型的低成本一体化小型多维加速度传感器<sup>[1-2]</sup>,其在实际中已经获得了应用<sup>[3]</sup>。图1是其测量原理示意图,z轴向加速度 $a_z$ 作用时,E形圆膜片1受到圆形质量块3垂直方向惯性力 $F_z$ 作用,产生如图1(a)的变形;x(或y)轴向加速度 $a_x$ (或 $a_y$ )作用时,膜片的变形如图1(b),其中硬中心2连接着膜片与质量块。相应地,膜片敏感面沿x轴、y轴和与其成45°方向上各对称粘贴的四个应变片(如图2所示)的阻值发生变化,进而由其所组成的惠斯通直流电桥输出电压发生变化,实现对各轴向线加速度的测量。

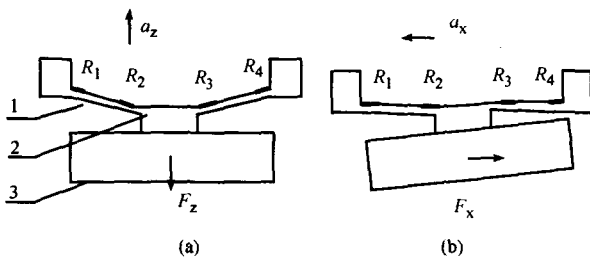


图1 多维加速度传感器测量原理示意

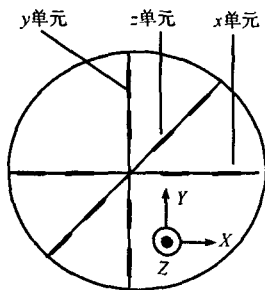


图2 膜片上应变片分布示意

弹性体的设计是这种多维加速度传感器设计的关键;了解弹性体的特性,对于确定弹性体结构形式、尺寸及优化极其重要。考虑到本传感器结构、E膜片的对称性,及E膜片的设计尺寸,E膜片的受力变形可依据圆薄板小挠度变形处理;本文通过对E膜片的受力分析,建立轴向线加速度载荷 $a_z$ 、 $a_x$ 作用时边界条件,参考圆薄板轴对称/反轴对称变形的弹性曲面微分方程、及通解,获得膜片应力应变解析解;同时给出有关算例。而轴向加速度载荷 $a_y$ 作用下,膜片应力应变分析同载荷 $a_x$ 的分析一样,故不作详细讨论。

### 1 $a_z$ 作用下 E 膜片应力应变解析分析

在z轴向加速度 $a_z$ 的作用下,质量块 $m$ 产生的惯性力 $F_z = -m \cdot a_z$ 使得E膜片产生如图1(a)的变形。实际上,E膜片的有效敏感部分是一个圆环平膜片,假定变形很小,内外半径分别为 $r_1, r_2$ ,厚

$h$ ,满足关系:

$$\frac{1}{100} \sim \frac{1}{80} < \frac{h}{r_2 - r_1} < \frac{1}{8} \sim \frac{1}{5} \quad (1)$$

即符合薄板小挠度变形条件。同时,E膜片的边界条件比较简单,可等效为外圆周固定,集中力作用在硬中心的圆形薄板。在E膜片中面建立三维柱面 $(r, \theta, z)$ 坐标系,对应坐标轴的相应位移为 $(u_r, u_\theta, u_z)$ ,挠度 $w$ 和横向荷载 $q$ 都作为极坐标的函数 $w = w(r, \theta), q = q(r, \theta)$ ,记板厚 $h$ 、材料弹性模量 $E$ 、泊松系数 $\mu$ ,膜片上下表面分别为 $\pm h/2$ ,由圆薄板轴对称变形解得挠度 $w$ <sup>[4-5]</sup>:

$$w = \frac{3(1-\mu^2)F_z}{4\pi E h^3} [R^2 (\ln R^2 - A - 1) + A \ln R^2 + A + 1] \quad (2)$$

式中,  $R = \frac{r}{r_2}, B = \frac{r_1}{r_2}, A = -\frac{B^2 \ln B^2}{1 - B^2}$ 。

考虑到 $F_z = -ma_z$ ,对膜片下表面而言, $z = h/2$ ,根据圆薄板小挠度弯曲时,薄板中的主要应力分量 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ 表达式<sup>[6-8]</sup>:

$$\sigma_r = \frac{12M_r}{h^3} z, \sigma_\theta = \frac{12M_\theta}{h^3} z, \tau_{r\theta} = \frac{12M_{r\theta}}{h^3} z, \quad (3)$$

其中:

$$\begin{cases} M_r = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \\ M_\theta = -D \left[ \mu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \end{cases} \quad (4)$$

式(4)中, $D$ 为抗弯模量:

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} \quad (5)$$

得:

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{3m}{4\pi h^2} \left[ (1+\mu)(2\ln R - A) + (\mu-1) \frac{A}{R^2} + 2 \right] a_z \\ \sigma_\theta = \frac{3m}{4\pi h^2} \left[ (1+\mu)(2\ln R - A) + (1-\mu) \frac{A}{R^2} + 2\mu \right] a_z \end{cases} \quad (6)$$

由式(6)可知同一 $r$ 值下应力 $\sigma_r, \sigma_\theta$ 与 $a_z, m$ 间呈线性关系。

### 2 $a_x$ 作用下 E 膜片应力应变解析分析

#### 2.1 膜片应力应变简化等效分析

$x$ 轴向加速度 $a_x$ 作用时,因质量块的质心不在膜片中面内(距离 $l$ ),此时质量块 $m$ 惯性所产生的平行于膜片中面惯性力 $F_x$ ,使得膜片发生如图1(b)所示的变形。这种变形,可等效为集中力偶矩 $M$ 作用于膜片硬中心而得结果,如图3(a)所示。因传感器具有 $x$ 方向结构的对称性,极坐标 $r$ 轴取 $x$ 轴正向,坐标 $\theta$ 角取值范围 $[-\pi, \pi]$ ,因 $M$ 力矩作用具有

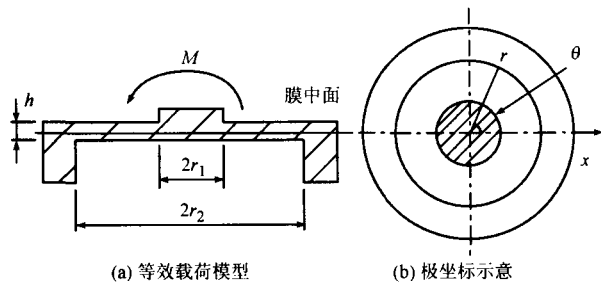


图 3 X 方向线加速度作用分析

反对称载荷特性, 硬中心圆的偏转将引起膜片的反对称变形, 即膜片中面半径为  $r$  的圆周上, 在右端向上产生  $z$  向位移时, 左端向下产生位移。由极坐标示意图 3(b), 膜片挠曲面  $w(r, \theta)$ , 此反对称变形可记为:

$$w(r, \theta) \Big|_{r, \theta} = w(r, \theta) \Big|_{r, -\theta} = \begin{cases} -w(r, \theta) \Big|_{r, \pi-\theta}, (\theta \in [0, \pi]) \\ -w(r, \theta) \Big|_{r, -\pi-\theta}, (\theta \in [-\pi, 0]) \end{cases} \quad (7)$$

而力矩  $M$  与加速度  $a_x$  间关系:

$$M = -ma_x l \quad (8)$$

### 2.2 膜片挠曲面方程 $w(r, \theta)$ 的建立与解析解

这里, E 膜片外周边固定, 边界位移条件:

$$w(r, \theta) \Big|_{r=r_2} = 0, \frac{\partial w(r, \theta)}{\partial r} \Big|_{r=r_2} = 0 \quad (9)$$

且 E 膜片内周边与硬中心相联接, 硬中心绕平行于  $y$  轴的直径偏转一个较小的角度  $\varphi$ , 见图 4 所示  $\angle b'ob$ ,  $ob$  是硬中心圆位于  $x$  轴正向的半径,  $ob'$  是偏转后的位置。

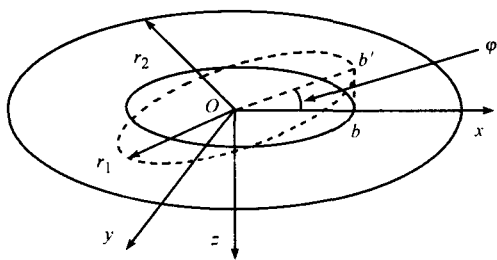


图 4 硬中心偏转角示意

因  $\varphi$  很小, 仍然设定 E 膜片中面不变形, 则由图 4 可以得到约束条件:

$$\frac{\partial w(r, \theta)}{\partial r} \Big|_{r=r_1} \approx \frac{w(r)}{r} \Big|_{r=r_1} \quad (10)$$

而集中力偶矩  $M$  与膜片外 ( $r=r_2$ ) 周边扭矩  $M_\theta$ , 横向剪力  $Q_r$  对硬中心形成力矩三者间满足平衡条件:

$$M + r_2^2 \int_{-\pi}^{\pi} (Q_r)_{r=r_2} \cos\theta d\theta - r_2^2 \int_{-\pi}^{\pi} (M_\theta)_{r=r_2} \sin\theta d\theta \quad (11)$$

参照极坐标系下, 受反对称载荷  $q(r, \theta) = q_0 r \cos\theta$  ( $q_0$  为横向载荷), 作用的圆薄板的挠曲面函数  $w(r, \theta)$  所应满足的基本微分方程<sup>[6-8]</sup>:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) =$$

$$\frac{q_0 r \cos\theta}{D} \quad (12)$$

式(12)的解可表示为:

$$w(r, \theta) = \left( C_1 r^{-1} + C_2 r + C_3 r^3 + C_4 r \ln r + \frac{q_0 r^5}{192D} \right) \cos\theta \quad (13)$$

实际上, E 膜片上无横向载荷, 即:

$$q_0(r, \theta) = 0 \quad (14)$$

得到膜片挠曲面方程为:

$$w(r, \theta) = (C_1 r^{-1} + C_2 r + C_3 r^3 + C_4 r \ln r) \cos\theta \quad (15)$$

式中  $C_1, C_2, C_3, C_4$  为待定常数, 由边界条件式(9)、(10)、(11)确定。结合扭矩  $M_\theta$ , 横向剪力  $Q_r$  表达式<sup>[9-10]</sup>:

$$M_\theta = -D(1-\mu) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w \quad (16)$$

联立方程(15)、(9)、(10)、(11); 并令

$$C = \frac{M}{4\pi D(r_1^2 + 3r_2^2)}, \text{ 得 } C_1, C_2, C_3, C_4: \begin{cases} C_1 = r_1^2 r_2^2 C \\ C_2 = -(2r_2^2 \ln r_2 - r_2^2 + r_1^2 + 2r_1^2 \ln r_2) C \\ C_3 = -C \\ C_4 = 2(r_1^2 + r_2^2) C \end{cases} \quad (17)$$

即确定挠曲面方程(15)表达式。

### 2.3 膜片应力应变表示

结合(3)、(4)、(15)得到 E 膜片下表面应力值:

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{6D}{h^2} \cos\theta [2C_1 r^{-3} (\mu - 1) + 2C_3 r (1 + 3\mu) + C_4 r^{-1} (\mu + 1)] \\ \sigma_\theta = \frac{6D}{h^2} \cos\theta [2C_1 r^{-3} (1 - \mu) + 2C_3 r (\mu + 3) + C_4 r^{-1} (\mu + 1)] \end{cases} \quad (18)$$

式(18)中, 系数  $C_1, C_3, C_4$  值由(17)确定; 显然对于同一  $r$  值应力  $\sigma_r, \sigma_\theta$  与  $m, a_x$  成线性关系。

## 3 E 膜片应力应变解析分析算例描述

算例: 取 E 膜片厚度  $h=0.2$  mm,  $r_1=3$  mm,  $r_2=8$  mm, 即满足式(1)条件; 材料为铜(Cu), 其弹性模量  $E=1.17 \times 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>, 泊松比  $\mu=0.3$ , 密度  $\rho=8.9 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>; 质量块高度  $h_m=8$  mm, 半径  $r=3$  mm, 取  $x, z$  轴向线加速度载荷分别为  $10$  m/s<sup>2</sup>。依据图 2 所示的应变片分布方式, 应变片的应变敏感方向取圆膜片径向且忽略其横向应变效应, 仅考虑径向应变  $\epsilon_r$ :

$$\epsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu \sigma_\theta) \quad (19)$$

将式(6)代入式(19),得 $z$ 轴向线加速度载荷下,E膜片下表面 $\epsilon_r$ 与 $r$ 关系分布图,如图5所示。在图5中,靠近E圆膜片边缘的 $\epsilon_r$ 数值大,内边缘 $\epsilon_r$ 正最大值、外边缘为负最大值。将式(18)代入式(19),在 $z$ 轴向线加速度载荷下,考虑图2的布片形式,对 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 单元位置,分别取 $\theta=0^\circ, 180^\circ, \theta=90^\circ, -90^\circ, \theta=45^\circ, -135^\circ$ 的径向应变来考察,显然 $y$ 单元位置径向应变 $\epsilon_r$ 为零, $x$ 、 $z$ 单元位置 $\epsilon_r$ 与 $r$ 关系分布见图6所示。在图6中,同 $\theta$ 值的 $\epsilon_r$ 正(负)极值均在

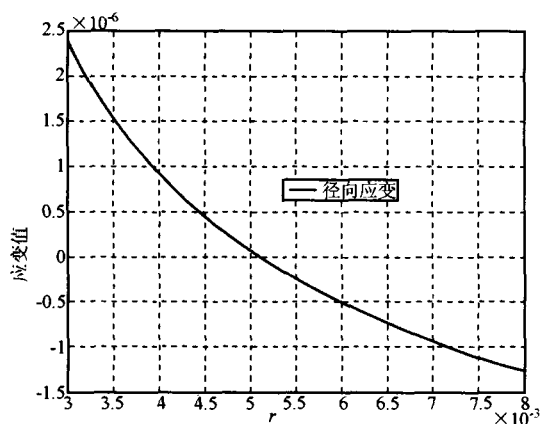


图5  $z$ 轴向线加速度载荷膜片下表面径向应变分布

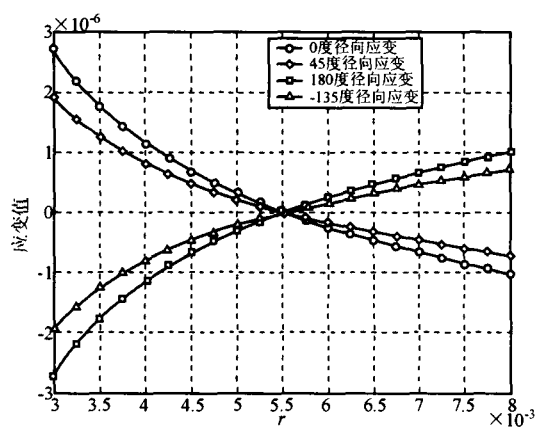


图6  $x$ 轴向线加速度载荷下膜片径向应变分布

膜片的内或外边缘; $\theta$ 相差 $180^\circ$ 时, $\epsilon_r$ 分布为反对称方式,是式(18)中 $\theta$ 余弦函数属性的体现。由图5和图6结果表明,依据图2布片方式,所粘贴的应变片应靠近膜片边缘,以感应较大的应变变化;同时结合文献[2]对各方向单元应变片组桥方式选择,可以用来测量三维线加速度。

## 4 小结

通过对E膜片的受力分析,由轴向线加速度载荷 $a_z$ 、 $a_x$ 作用时边界条件、膜片的变形状态,及参考圆薄板轴对称/反轴对称变形的弹性曲面微分方程、及通解,获得了膜片应力应变解析解。所获得的解析解,在为后续传感器结构动态建模、动态特性分析、动态解耦等提供参考同时,也对同类型结构弹性体的应力应变分析提供一定的借鉴作用。

## 参考文献:

- [1] 吴仲城,戈瑜,虞承端.基于厚膜技术E型三维加速度传感器的设计[J].仪表技术与传感器,2001,(9):3-5.
- [2] 吴仲城.多维力传感器设计及信号分析方法研究[D].博士学位论文,合肥:中国科学院等离子体物理研究所,2001.5.
- [3] 孙旺强 宋光明等.基于三维加速度计数字铅球的设计与实现[J].计算机工程与应用,2005,41:102-104.
- [4] 孟明,葛运建,吴仲城等.一种新型多维加速度传感器弹性体设计与仿真分析[J].传感技术学报,2003,4:379-383.
- [5] 刘广玉,陈明,吴志鹤等.新型传感器技术及应用[M].北京:北京航空航天大学出版社,1995.
- [6] 杜庆华主编.工程力学手册[M].北京:高等教育出版社,1994,10.
- [7] 吴连元.板壳理论[M].上海:上海交通大学出版社,1989,6.
- [8] 沃国纬,王元淳编.弹性力学[M].上海:上海交通大学出版社,1998,9.