

## 小波去噪的几种方法

文 莉<sup>1</sup>, 刘正士<sup>1</sup>, 葛运建<sup>2</sup>

(1. 合肥工业大学 机械与汽车工程学院, 安徽 合肥 230009; 2. 中国科学院 合肥智能机械研究所, 安徽 合肥 230031)

**摘 要:**利用小波方法去噪,是小波分析应用于工程实际的一个重要方面。该文介绍了几种常用的小波去噪方法,分别是小波分解与重构法、非线性小波变换阈值法、平移不变量法和小波变换模极大值法,将上述几种方法分别用于叠加了高斯白噪声的仿真信号的去噪处理,并通过对几种方法优缺点的比较,为小波去噪的方法选择提供了一个参考依据。

**关键词:**小波变换;去噪;阈值;平移不变量;模极大值

**中图分类号:**TH165.3 **文献标识码:**A **文章编号:**1003-5060(2002)02-0167-06

## Several methods of wavelet denoising

WEN Li<sup>1</sup>, LIU Zheng-shi<sup>1</sup>, GE Yun-jian<sup>2</sup>

(1. School of Mechanical and Automobile Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China; 2. Hefei Institute of Intelligent Instrument, Chinese Academy of Sciences, Hefei 230031, China)

**Abstract:** Using wavelet denoising is an important application of wavelet analysis in engineering. Several popular wavelet denoising methods are introduced herein including the wavelet decomposition and reconstruction method, the nonlinear wavelet threshold denoising method, the translation invariant denoising method and the wavelet transform modulus maxima method. These methods are used to remove the Gaussian white noise from the simulated signal respectively. Their advantages and disadvantages are compared, which may be helpful in selecting the methods of wavelet denoising.

**Key words:** wavelet transform; denoising; threshold; translation invariant; modulus maxima

小波分析是近十几年来发展起来的一种新的数学理论和方法,目前已被成功地应用于许多领域。作为一种新的时频分析方法,小波分析由于具有多分辨率分析的特点,能够聚焦到信号的任意细节进行多分辨率的时频域分析,因而被誉为“数学显微镜”。

在信号处理领域,用小波方法去噪已得到了越来越广泛的应用。小波去噪的方法有多种:1988年,文献[1]提出了多分辨率分析的概念,使小波具有带通滤波的特性,因此可以利用小波分解与重构的方法滤波降噪<sup>[2]</sup>;1992年文献[3]又提出了奇异性检测的理论,从而可利用小波变换模极大值的方法去噪<sup>[4~6]</sup>。此后,文献[7~11]提出了非线性小波变换阈值法去噪,用该方法去噪得到了非常广泛的应

**收稿日期:**2001-09-24

**基金项目:**国家“863”基金资助项目(2001AA423300)和安徽省自然科学基金资助项目(00043310)

**作者简介:**文 莉(1973—),女,安徽合肥人,合肥工业大学硕士生;

刘正士(1947—),男,安徽合肥人,博士,合肥工业大学教授,博士生导师;

葛运建(1947—),男,山东蓬莱人,中国科学院合肥智能机械研究所研究员,博士生导师。

用<sup>[12,13]</sup>,1995年,文献[14]在阈值法的基础上提出了平移不变量小波去噪法<sup>1)</sup>,它是对阈值法的一种改进。此外,文献[15]提出了原子分解的基追踪去噪法;文献[16]提出了多小波(multi-wavelet)的概念,近两年来应用多小波去噪<sup>[17,18]</sup>也日益成熟。

本文主要介绍小波分解与重构法、非线性小波变换阈值法、平移不变量小波法以及小波变换模极大值法这4种常用的小波去噪方法。将它们分别用于仿真算例的去噪处理,并对这几种方法的应用场合、去噪性能、计算速度和影响因素等方面进行比较,最后对小波去噪方法选择加以总结。

## 1 几种小波去噪方法的基本原理

### 1.1 小波分解与重构法去噪

1988年,文献[1]提出了多分辨率分析的概念,并给出了小波分解与重构的快速算法,即 Mallat 算法。据这一算法,若  $f_k$  为信号  $f(t)$  的离散采样数据,  $f_k = c_{0,k}$ , 则信号  $f(t)$  的正交小波变换分解公式为

$$\begin{cases} c_{j,k} = \sum_n c_{j-1,n} h_{n-2k} \\ d_{j,k} = \sum_n d_{j-1,n} g_{n-2k} \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (1)$$

其中,  $c_{j,k}$  为尺度系数,  $d_{j,k}$  为小波系数;  $h, g$  为一对正交镜像滤波器组(QMF);  $j$  为分解层数;  $N$  为离散采样点数。

小波重构过程是分解过程的逆运算,相应的重构公式为

$$c_{j-1,n} = \sum_k c_{j,k} h_{k-2n} + \sum_k d_{j,k} g_{k-2n} \quad (2)$$

小波的多分辨率分析特性将信号在不同尺度下进行多分辨率的分解,并将交织在一起的各种不同频率组成的混合信号分解成不同频段的子信号,因而对信号具有按频带处理的能力。应用小波分解与重构的方法去噪具体步骤是:根据需要,将含有噪声信号在某一尺度下分解到不同的频带内,然后再将噪声所处的频带置零(或直接提取有用信号所在的频带),进行小波重构,从而达到去噪的目的。

### 1.2 非线性小波变换阈值法去噪

非线性小波变换阈值法也称为“小波收缩”(wavelet shrinkage),其去噪方法如下:

假设一个叠加了高斯白噪声的有限长信号可以表示为

$$y_i = x_i + \sigma z_i \quad (i = 0, 1, \dots, n-1) \quad (3)$$

其中,  $z_i$  是一个标准的高斯白噪声,即  $z_i \sim N(0, 1)$ ,  $\sigma$  是噪声级。若要从被噪声污染的信号  $y_i$  中恢复出原始信号  $x_i$ , 则 Donoho 的去噪方法分为以下3个步骤:

(1) 计算含噪声信号的正交小波变换。选择合适的小波和小波分解层数  $j$ , 将含噪信号运用(1)式进行小波分解至  $j$  层, 得到相应的小波分解系数。

(2) 对分解得到的小波系数进行阈值处理,其阈值的处理方法有2种:

$$\text{硬阈值法} \quad \hat{x} = T_h(Y, t) = \begin{cases} Y & |Y| \geq t \\ 0 & |Y| < t \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{软阈值法} \quad \hat{x} = T_s(Y, t) = \begin{cases} \text{sgn}(Y)(|Y| - t) & |Y| \geq t \\ 0 & |Y| < t \end{cases} \quad (5)$$

(3) 进行小波逆变换。将经阈值处理过的小波系数用(2)式重构,得到恢复的原始信号估计值  $\hat{x}$ 。

小波变换具有一种“集中”的能力,它能够将信号的能量集中到少数小波系数上,而白噪声在任何正交基上的变换仍然是白噪声,并且有着相同的幅度。相对来说,信号的小波系数值必然大于那些能量分散

1) Lang M, Guo H, Odegard J E, et al. Nonlinear processing of a shift invariant DWT for noise reduction[A]. Proceeding of SPIE Conference 2491, Wavelet Application[C]. Orlando, 1995.

且幅值较小的噪声的小波系数值。选择一个合适的阈值,对小波系数进行阈值处理,就可以达到去除噪声而保留有用信号的目的。该方法能得到原始信号的近似最优估计,并且具有非常广泛的适应性<sup>[1]</sup>。

### 1.3 平移不变量小波去噪

平移不变量小波去噪法是在阈值法基础上的改进。虽然用阈值法能取得很好的去噪效果,但在有些情况下,如在信号的不连续邻域,阈值法去噪会表现出视觉上的非自然信号,如伪吉布斯现象,即不连续点附近的信号会在一个特定的目标水平上下跳变。利用平移不变量法去噪,则可有效地抑制这种现象。其方法是:对含噪声信号进行  $n$  次循环平移,对平移后的信号进行的阈值法去噪处理,然后再对去噪的结果进行平均,这就是所谓的“平移—去噪—平均”的平移不变量小波去噪法。

对于一个信号  $x_t(0 \leq t \leq n)$ ,  $H_n = \{h: 0 \leq h < n\}$ , 用  $S_h$  表示对信号  $x_t$  进行  $h$  的时域平移,  $h$  是正整数,  $T$  表示对信号用 Donoho 的阈值法进行去噪处理,  $Ave$  表示“平均”,  $S_{-h} = (S_h)^{-1}$ , 则  $n$  次循环平移的平移不变量小波去噪方法可以表示为

$$\bar{T}(x, (S_h)_{h \in H_n}) = Ave_{h \in H_n} S_{-h}(T(S_h(x))) \quad (6)$$

该方法在去除伪吉布斯现象,表现出更好的视觉效果的同时,还能够得到比阈值法去噪更小的均方根误差(RMSE),并且提高了信噪比(SRN)。

### 1.4 小波变换模极大值法去噪

信号的奇异点就是指信号中的突变点,  $Lip$  指数是表征信号局部奇异点特征的一种量度,它的定义如下:设有正整数  $n, n \leq \alpha \leq n+1$ , 如果存在正整数  $A > 0$  及  $n$  次多项式  $p_n(x)$ , 使得

$$|f(x) - p_n(x - x_0)| \leq A|x - x_0|^\alpha$$

对于  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  成立, 则称  $f(x)$  在  $x_0$  点是  $Lip\alpha$  的。

函数在某一点的  $Lip$  指数表征了该点的奇异性大小。 $\alpha$  越大, 该点的光滑度越高,  $\alpha$  越小, 该点的奇异性越大。函数在某一点可导, 它的  $\alpha \geq 1$ ; 函数在某点不连续但其值有限, 则  $0 \leq \alpha \leq 1$ 。对一般信号而言, 它的  $\alpha \geq 0$ ; 脉冲信号的  $\alpha = -1$ ; 白噪声的  $\alpha < 0 (\alpha = -\frac{1}{2} - \epsilon, \epsilon > 0)$ 。

在尺度  $s$  下, 若  $\forall x \in \delta x_0$ , 有

$$|Wf(s, x)| \leq |Wf(s, x_0)| \quad (7)$$

则称  $x_0$  为小波变换在尺度  $s$  下的局部模极大值点。信号  $f(x)$  的  $Lip$  指数与小波变换模极大值满足

$$\log_2 |W_j f(t)| \leq \log_2 k + j\alpha \quad (8)$$

由(8)式可知, 对于一般信号, 由于  $\alpha \geq 0$ , 小波变换的模极大值将随着  $j$  的增大而增大; 而对于白噪声, 由于  $\alpha < 0$ , 其模极大值随着  $j$  的增大而减小。因此, 观察不同尺度间小波变换模极大值变化的规律, 去除幅度随尺度的增加而减小的点(对应噪声的极值点), 保留幅度随尺度增加而增大的点(对应于有用信号的极值点), 然后再由保留的模极大值点用交替投影法进行重建, 即可以达到去噪的目的。

## 2 仿真算例

本文选择了 Matlab 软件中的仿真信号 Blocks 作为原始信号, 信号长度(即采样点数)  $N = 2048$ , 如图 1a 所示。由于该信号中含有若干不连续点和奇异点, 因此用上述方法对图 1b 中叠加了高斯白噪声的 Blocks 信号(信噪比为 7)进行去噪处理, 能够很清楚地比较出这几种方法的去噪性能。去噪结果分别如图 2、图 3、图 4、图 5 所示。

图 2 是用小波分解与重构法进行去噪的结果。采用的小波是近似对称的 Symmlet 8 小波, 小波分解层数是 4, 其中图 2a 是将图 1b 中的含噪信号进行 4 层小波分解的结果。从中可以看出, 信号的能量主要集中在低频的少数小波系数上, 而噪声的能量则分散于整个小波变换域。图 2b 是提取图 2a 中的前 256 个小波系数进行重构, 也就是提取尺度 4 上的低频系数和高频系数进行重构的结果。

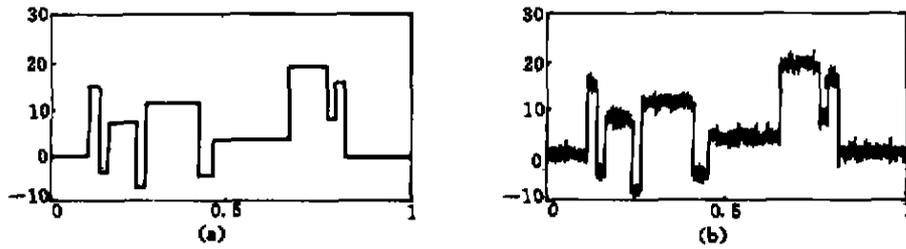


图 1 原始信号和含噪信号的时域波形

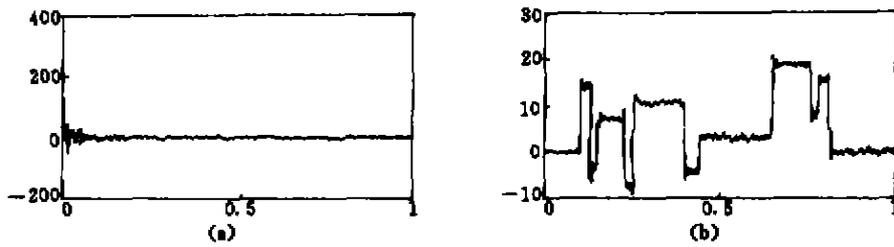


图 2 小波分解与重构去噪

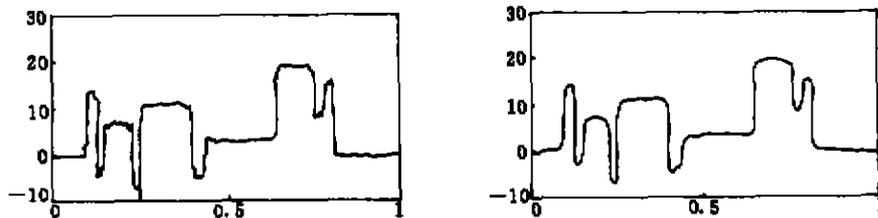


图 3 软阈值法去噪

图 4 平移不变量小波法去噪

图 3 和图 4 分别是采用 Donoho 的非线性小波变换阈值法以及平移不变量小波法去噪得到的结果。这 2 种方法均选用 Haar 小波,小波分解层数是 5。二者均采用软阈值,阈值大小  $t = \sqrt{2\log(N)}$ ,其中  $N$  为信号长度。图 5 是用小波变换模极大值法去噪的结果。所采用的是双正交样条小波,小波分解层数是 2。

从以上各图可以看出,由于白噪声是分布于所有的小波系数上,用小波分解与重构的方法去噪,虽能大致恢复原始信号的波形,但却无法去除与信号频带相互重叠的那部分白噪声,因而去噪的效果并不是太理想。而用软阈值法、平移不变量法以及模极大值法去噪,均可得到较为满意的图面质量,噪声基本被去除。图 3 用软阈值法去噪时,在信号的不连续点处,仍存在一定幅度的振荡,即所谓的伪吉布斯现象;而在图 4 用平移不变量法去噪,不仅去除了噪声,而且还有效地抑制了伪吉布斯现象,具有非常好的图面质量。图 5 用模极大值法去噪,反映信号特征的奇异点信息得到很好的保留,去噪效果也很好。

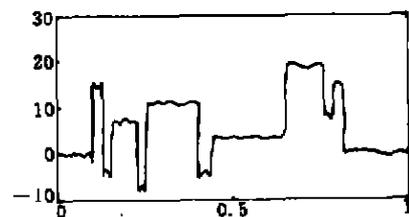


图 5 小波变换模极大值法去噪

将原始信号  $x(n)$  作为标准信号,则经小波去噪后的估计信号  $\hat{x}(n)$  的信噪比(SNR)公式定义为

$$\text{SNR} = 10 \log \left[ \frac{\sum_n x^2(n)}{\sum_n [x(n) - \hat{x}(n)]^2} \right] \quad (9)$$

原始信号与估计信号之间的均方根误差(RMSE)定义如下

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_n [x(n) - \hat{x}(n)]^2} \quad (10)$$

信号的信噪比越高,原始信号与估计信号的均方根误差越小,则估计信号就越接近于原始信号,去噪效果越好。表 1 中列出了用这 4 种方法去噪,信号的信噪比(SNR)和均方根误差(RMSE)的比较。从信噪比和均方根误差的角度看,模极大值法的去噪性能最好,小波分解与重构法最差,阈值法和平移不变量法居中。

表 1 几种方法去噪后 SNR 和 RMSE 的比较

	小波分解与重构法	软阈值法	平移不变量法	模极大值法
SNR	19.137 5	22.898 1	25.446 2	28.146
RMSE	45.04	29.212 3	21.785 2	15.965

### 3 几种小波去噪方法的比较

#### 3.1 小波分解与重构法去噪

本质上相当于一个具有多个通道的带通滤波器,主要适用于有用信号和噪声的频带相互分离时的确定性噪声的情况。在这种情况下,该方法能基本去除噪声,去噪效果很好。但对于有用信号和噪声的频带相互重叠的情况(如信号混有白噪声),效果就不甚理想。这种方法的优点是算法简单明了,计算速度快。若  $N$  为信号的长度,则它的计算速度是  $O(N)$ 。其缺点是适用范围不是很广泛。它对于特定情况下已知道噪声的频率范围且信号和噪声的频带相互分离时非常有效。对实际应用中广泛存在的白噪声,其去噪效果则较差。

#### 3.2 非线性小波变换阈值法去噪

主要适用于信号中混有白噪声的情况。用阈值法去噪的优点是噪声几乎完全得到抑制,且反映原始信号的特征尖峰点得到很好的保留。文献[9]证明了用软阈值的方法去噪能够使估计信号实现最大均方误差最小化,即去噪后的估计信号是原始信号的近似最优估计,且估计信号至少和原始信号同样光滑而不会产生附加振荡。该方法还具有广泛的适应性,因而是众多小波去噪方法中应用最为广泛的一种。阈值法的计算速度很快,为  $O(N)$ ,其中  $N$  为信号长度。其缺点是在有些情况下,如在信号的不连续点处,去噪后会出现伪吉布斯现象。且用该方法去噪时,阈值的选择对去噪效果有着很重要的影响。阈值的选择方法有多种<sup>[18]</sup>,实际应用时应根据具体的情况来选择合适的阈值。

#### 3.3 平移不变量小波法去噪

主要适用于信号中混有白噪声且含有若干不连续点的情况,是在阈值法基础上的改进。其优点可以有效地去除阈值法去噪中,在信号的不连续点处所产生的伪吉布斯现象,表现出比阈值法更好的视觉效果。从  $L^2$  范数误差的观点看,经该方法去噪能够得到比阈值法更小的均方根误差,信噪比也得到一定地提高,缺点是计算速度没有阈值法快。当信号长度是  $N$  时,计算速度是  $O(N \log N)$ <sup>[14]</sup>。

#### 3.4 模极大值法去噪

主要适用于信号中混有白噪声,且信号中含有较多奇异点的情况。该方法在去噪的同时,有效地保留信号的奇异点信息,去噪后的信号没有多余振荡,是原始信号的一个非常好的估计,具有较好的图面质量。用模极大值进行重构时采用的是交替投影法,为保证重构信号的精度,提高信噪比,通常要进行几十次的迭代,每迭代一次的速度是  $O(N \log N)$ 。因此,计算速度非常慢,通常要比前几种方法慢数十倍。

同时利用该方法去噪,小波分解尺度的选择非常重要。小尺度下小波系数受噪声影响非常大,产生许多伪极值点;大的尺度会使信号丢失某些重要的局部奇异性<sup>[10]</sup>。因此,去噪还需要选择合适的尺度。

## 4 结 论

通过仿真实验和对几种小波去噪方法的分析比较,总结出如下几点,可以为小波去噪方法的选择提供参考依据。

(1) 对于信号和噪声的频带相互分离的确定性噪声的去噪处理,选用方法简单、计算速度快的小波分解与重构去噪法最为合适。

(2) 对于高斯白噪声的去噪处理,可以选用阈值法、平移不变量法以及模板大值法。究竟选择哪种方法应根据实际信号的特点以及这几种方法的优缺点再作决定。① 阈值法由于具有能得到原始信号的近似最优估计、计算速度快以及具有广泛的适应性等优点,是小波去噪方法中应用最广泛的一种。一般情况下,均可选用该方法去噪。② 平移不变量法适用于信号中含有若干不连续点的情况。通常去噪性能优于阈值法,但以牺牲计算速度为代价。③ 小波变换模板大值法当信号中含有较多奇异点时去噪性能相当好,但其最大缺点就是计算速度太慢,在应用中需权衡去噪效果和计算速度之间的关系。

(3) 小波去噪方法和其它方法结合使用,可能会达到更好的效果。

## [参 考 文 献]

- [1] Mallat S. Theory for multi-resolution signal decomposition, The wavelet representation[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1989, 11(7): 674-693.
- [2] 韩震宇, 申旭娟, 石章林. 信号的多分辨率分析及其在消噪中的应用[J]. 四川联合大学学报, 1999, 3(1): 52-58.
- [3] Mallat S, Hwang W L. Singularity detection and processing with wavelets[J]. IEEE Transaction on Information Theory, 1992, 38(2): 617-643.
- [4] 杜 芳, 卢文胜, 曹文清. 振动台试验测试信号去噪的小波变换方法[J]. 振动与冲击, 1999, 18(2): 26-29.
- [5] 刘曙光, 殷 明. 子波消噪技术及其应用[J]. 西北纺织工学院学报, 1999, 13(1): 16-20.
- [6] 彭玉华, 汪文秉. 小波用于估测散射波波达时间及去噪[J]. 电子学报, 1996, 24(4): 113-116.
- [7] Donoho D L. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage[J]. J Amer Statist Assoc, 1995, 90: 1 200-1 224.
- [8] Donoho D L, Johnstone I. Wavelet shrinkage asymptopia[J]. Journal of Royal Statistical Society, 1995, 57 (2): 301-369.
- [9] Donoho D L. Denoising by soft-thresholding[J]. IEEE Transaction on Information, 1995, (3): 613-627.
- [10] 彭玉华. 小波变换与工程应用[M]. 北京: 科学出版社, 1999. 59-62.
- [11] 郑海波, 陈心昭, 李志远. 基于小波包变换的一种降噪算法[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2001, 24(4): 459-462.
- [12] 张子瑜, 吴镇扬, 陈 进. 机组运行趋势的小波包掩模去噪研究[J]. 机械工程学报, 2000, 36(5): 93-96.
- [13] 杨其俊, 裴峻峰, 孙 辉. 小波消噪及其在往复泵振动监测信号处理中的应用[J]. 振动与冲击, 2000, 19(2): 20-23.
- [14] Coifman R R, Donoho D L. Translation-invariant denoising, wavelets and statistics[M]. New York, Springer-Verlag, 1995. 125-150.
- [15] Chen S, Donoho D. Atomic decomposition by basis pursuit[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 1999, 20(1): 33-61.
- [16] Goodman T N T, Lee S L. Wavelets of multiplicity[J]. Trans of Amer Math Soc, 1994, 342(1): 307-324.
- [17] Dowine T R, Silverman B W. The discrete multiple wavelet transform and thresholding methods[J]. IEEE Trans SP, 1998, 46(9): 2 558-2 561.
- [18] Bui T D, Chen G. Translation-invariant denoising using multiwavelets[J]. IEEE Trans SP, 1998, 46 (12): 3 414-3 420.
- [19] Donoho D L, Johnstone I. Idesl spatial adaptation by wavelet shrinkage[J]. Biometrika, 1994, 81(3): 425-455.

(责任编辑 朱华新)