

一种简单而精确的径向畸变标定方法

孔 斌^{1),2)} 方廷健¹⁾

¹⁾(中国科技大学自动化系,合肥 230027) ²⁾(中国科学院合肥智能机械研究所,合肥 230031)

摘 要 为了用普通低成本的广角镜头摄像机实现较大视场的精确定量的图像测量,必须对畸变图像进行校正。提出了一种简单而精确的径向畸变标定方法,该方法使用栅格阵列标定模板。首先根据畸变图像中特征点之间的相互位置关系构造出理想图像中的特征点位置;然后以不同的畸变中心假设,计算畸变和理想特征点的矢径坐标,并通过解线性方程组或多项式拟合求出它们之间的函数关系;最后取矢径均方误差最小的参数组作为标定结果。该法可同时获得畸变变换和矫正变换的参数。文中还推导了畸变变换多项式系数与校正图像分辨率之间的反幂比例关系,讨论了畸变函数的阶对校正结果的影响,实验结果表明,取4阶或5阶多项式拟合的结果较好。

关键词 图像测量 径向畸变 栅格 极坐标系 (m 次)幂比例 反幂比例

中图分类号: TP391.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2004)04-0429-06

A Simple and Precise Method for Radial Distortion Calibration

KONG Bin^{1),2)}, FANG Ting-jian²⁾

¹⁾(Dept. of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei 230027)

²⁾(Hefei Institute of Intelligent Machines, Chinese Academy of Sciences, Hefei 230031)

Abstract To implement accurate metric measurement within a large field of view with common off-the-shelf cameras, the image distortion caused by wide-angle lenses should be corrected. A simple and precise method for calibrating the radial distortion is proposed. Any planar pattern in which the feature points form a grid can be used to obtain the calibration image. The proposed method first constructs an ideal image based on the positions of feature points extracted from the distorted image. Then the radial coordinates of the distorted and ideal feature points are calculated under the hypothesis of given center of distortion, and the relation function between the ideal and distorted radial coordinates is obtained by solving linear equations or by polynomial fitting. The set of parameters with the minimum mean-square-error is regarded as the calibration result. One merit of the proposed method is that both the undistorted-to-distorted and distorted-to-undistorted expression can be obtained at the same time by the same way. Moreover, the inverse power proportion relation between calibration result and resolution of rectified image is derived, and the influence of the order of distortion function on rectified image is discussed. Experiment results show that 4th or 5th order function would result better outcome.

Keywords image measurement, radial distortion, grid, polar coordinate system, (m th) power proportion, inverse power proportion

1 引 言

当使用普通低成本摄像机来配置测量用计算机视觉系统时,为了保证测量精度,物体的3D空间坐标系与图像坐标系之间的变换关系不能简单地用线性射影变换来建模。尤其当需要采用广角镜头以获

取尽可能大范围场景的图像信息时,必须对畸变图像进行校正。

图像几何畸变可分解成两部分^[1,2]:径向畸变和切向畸变。如能预先知道畸变模型,则进行几何校正后就可应用针孔摄像机模型来进行视觉计算。然而制造商一般不提供镜头的畸变模型,并且批量生产中不可避免地随机性导致同一规格型号镜头的畸变

参数一般也不相同。这就需要有简便的方法来获取镜头畸变参数。研究表明,在大多数机器视觉应用中可不必考虑切向畸变^[3]。

已有的径向畸变标定方法大致可分为3类。第1类使用标定模板^[3~7],根据模板上特征点的图像位置与其理想位置的偏差或对应来求畸变参数;如果已知特征点空间坐标及若干摄像机运动,则可同时求出摄像机内外参数。第2类不用标定模板,其基于射影变换将直线映射为直线的性质,迭代求取将图像中应是直线的曲线映射回直线的变换^[1,2,8]。第3类是盲校正方法^[9],它不需要模板,也不必知道景物知识,其原理是镜头畸变在频域中引入了高阶相关性,这种相关性可利用多谱分析来检测,畸变量通过使相关性最小而得到。由于没有利用空间点与图像点的对应关系,所以一般来说后两类方法不像第1类方法适用于图像测量。

本文提出了一种属于第1类的简单而精确的径向畸变标定方法。它与其他同类方法的主要区别是该方法可利用同一组特征点数据,用同样的方法同时获得畸变变换和校正变换的参数。文中还推导了变换参数与校正图像大小之间的关系,从而可任意变化校正图像的分辨率。

2 径向畸变模型

以图像像素坐标系表示的径向畸变模型一般写为

$$\begin{aligned} x_d &= x_c + (x_u - x_c) \cdot T(r) \\ y_d &= y_c + (y_u - y_c) \cdot T(r) \end{aligned} \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x_u - x_c)^2 + (y_u - y_c)^2} \\ T(0) &= 1 \end{aligned} \quad (2)$$

式中 (x_u, y_u) 是理想图像点的坐标, (x_d, y_d) 是对应畸变图像点的坐标, (x_c, y_c) 是畸变中心的坐标, $T(\cdot)$ 是畸变函数。若采用以畸变中心为原点的极坐标系,则径向畸变模型简化为

$$r_d = r_u \cdot T(r_u), \text{且 } T(0) = 1 \quad (3)$$

式中 r_u 是理想图像点的矢径坐标, r_d 是对应畸变图像点的矢径坐标。

绝大多数文献中所采用的畸变函数形式为

$$T(r) = 1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6 + \dots \quad (4)$$

其中有不少文献更是将其简化为^[1,4,9]

$$T(r) = 1 + k_1 r^2 \quad (5)$$

在所检索到的相关文献中,并未有一篇说明为何在式(4)中以偶次方升幂;这可能是因为偶次方幂可以避免式(2)中的开方运算,但仅使用偶次方幂也正是造成校正误差较大的原因。

考虑到任意一个满足 $T(0)=1$ 的光滑连续函数 $T(r)$ 可以由其泰勒展开式逼近

$$T(r) = 1 + k_1 r + k_2 r^2 + k_3 r^3 + \dots \quad (6)$$

式中

$$k_j = \frac{1}{j!} T^{(j)}(0), \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

所以用多项式可以表示任意的径向畸变^[8]。本文采用这种畸变函数表达式。显然,所取的有限阶数近似表达式阶数越高,余项就越小,相应地,校正精度就越高。但阶数增加时,所需的计算量也显著增加。因此在实际应用时,应根据所允许的误差选用适当阶数的近似表达。

3 径向畸变标定原理

由径向畸变的定义,任意一点的位置畸变仅与该点极坐标中的矢径坐标有关。将式(3)改写为

$$r_d = D(r_u), \text{且 } D(0) = 0 \quad (8)$$

或

$$r_u = D^{-1}(r_d), \text{且 } D^{-1}(0) = 0 \quad (9)$$

其中也将 $D(\cdot)$ 称为畸变函数, $D^{-1}(\cdot)$ 是校正函数。如果能知道每个特征点的理想和畸变矢径坐标,则问题可转变为线性方程组求解或多项式拟合问题。本文的方法是首先根据畸变图像中特征点的排列构造出理想特征点图像;然后以各种畸变中心假设计算特征点的畸变和理想矢径坐标,并根据式(8)或式(9)建立方程组求解或通过多项式拟合求出理想矢径 r_u 与畸变矢径 r_d 之间的映射关系 D (或 D^{-1});最后取矢径均方误差最小的畸变中心和对应多项式系数作为标定结果。该方法使用的标定模板图案不限,只要能提取出排列成纵横阵列的特征点即可(这是为了能方便准确地构造理想特征点图像)。

现在,问题就变为如何求得特征点的矢径坐标。显然,矢径坐标取决于极坐标系的原点,也即取决于畸变中心的位置。一旦畸变中心确定了,畸变图像中特征点的矢径坐标可由式(2)计算。

3.1 理想特征点图像的构造

考虑极坐标中任意一个图形,若将它绕原点任意旋转 φ ,图形旋转前后对应点的矢径坐标相等而角坐标相差 φ 。所以,一幅图像绕其极坐标原点的任意旋转都与原图像在矢径坐标相同的意义下等价。若畸变中心已知,那么只要模板平面与象平面平行,无论模板中特征点所连成的纵横栅格线是否与图像坐标轴平行,都可以构造出与该模板针孔成象的理想图像旋转等价的一幅图像,使其特征点所连成的栅格线与图像坐标轴平行。

不失一般性,设模板栅格与摄像机感光阵列的纵横比都为 1,则在针孔成象及模板平面与像平面平行的假设下,图像中的图案与模板图案是相似形。现在需确定的是,理想特征点相对于畸变中心的坐标。参见图 1,设畸变图像的畸变中心是点 P , A 、 B 、 C 、 D 是距 P 最近且能构成一个栅格的 4 个特征点;对应理想图像中 P' 是畸变中心, A' 、 B' 、 C' 、 D' 分别是 A 、 B 、 C 、 D 的对应点,根据假设, $A'B'C'D'$ 是正方形。因为离畸变中心越近的地方畸变量越小,所以 $ABCD$ 也近似为正方形。可以认为 $P-ABCD$ 与 $P'-A'B'C'D'$ 相似,从而根据 A 、 B 、 C 、 D 及 P 、 P' 的坐标和理想栅格边长,可求出 A' 、 B' 、 C' 、 D' 的坐标。

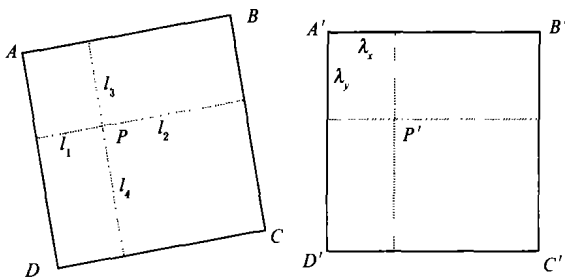


图 1 畸变特征点与理想特征点的位置关系

令过 P 点与 AD 、 BC 平行的线将 AB 分为 $\lambda_x : (1-\lambda_x)$ 两段 ($0 \leq \lambda_x \leq 1$),过 P 与 AB 、 DC 平行的线将 AD 分为 $\lambda_y : (1-\lambda_y)$ 两段 ($0 \leq \lambda_y \leq 1$)。假设 P' 点坐标为 $(x_{P'}, y_{P'})$,理想栅格边长为 d ,则 A' 、 B' 、 C' 、 D' 的坐标为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{A'} \\ y_{A'} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} -\lambda_x \\ -\lambda_y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_{B'} \\ y_{B'} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 1-\lambda_x \\ -\lambda_y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_{C'} \\ y_{C'} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 1-\lambda_x \\ 1-\lambda_y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_{D'} \\ y_{D'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} -\lambda_x \\ 1-\lambda_y \end{pmatrix} \quad (10)$$

若记 l_1, l_2, l_3, l_4 分别是点 P 到直线 AD 、 BC 、 AB 、 DC 的距离,则 λ_x, λ_y 由定义可计算如下:

$$\lambda_x = \frac{l_1}{l_1 + l_2} \quad \lambda_y = \frac{l_3}{l_3 + l_4} \quad (11)$$

一旦确定了 A' 点的坐标,其他理想栅格特征点的坐标可根据其相对于 A' 点的栅格阵列坐标计算而得。栅格阵列坐标定义为:特征点在栅格阵列中相对于某个指定的参考特征点的位置,其第 1 坐标为特征点与参考点所在的阵列列号的差值,其第 2 坐标为特征点与参考点所在的阵列行号的差值。例如,上述 B' 、 C' 、 D' 相对于 A' 的栅格阵列坐标分别为 $(1, 0)$ 、 $(1, 1)$ 、 $(0, 1)$;而 A' 相对于 B' 的栅格阵列坐标为 $(-1, 0)$;余此类推。当特征点 Q' 相对于 A' 点的栅格阵列坐标为 (m, n) 时,有

$$\begin{pmatrix} x_{Q'} \\ y_{Q'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{A'} \\ y_{A'} \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \quad (12)$$

3.2 确定理想栅格的边长

通过简单的计算推导,可以得出结论,理想栅格边长的不同取值对于径向畸变标定结果没有本质的影响。以下给出一个新的关于数的关系的名词定义。

定义 1 如果存在常数 m 和 $k(k \neq 0)$,使两个变量 a 和 b 的关系满足 $a = kb^m$,则称这两个变量成 m 次幂比例关系,又称 b 是 a 的 m 次幂比例量。当 $m > 0$ 时简称为幂比例, $m < 0$ 时简称为反幂比例。

当 $m = 1$ 时, a 和 b 就是通常所说的正比关系;当 $m = 0$ 时, a 是常量,任何变量都是常量的 0 次幂比例量;当 $m = -1$ 时, a 和 b 就是通常所说的反比关系。 m 不要求一定是整数。

定义 2 如果存在常数 m 和 $k(k \neq 0)$ 使两个有 n 个有序元素的数组 $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$, $\{b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}\}$ 之间的关系满足 $a_j = k^{m+j} b_j, j = 0, 1, 2, \dots, n-1$, 则称这两个数组是 m 次幂比例关系。

定理 1 径向畸变函数的系数与校正图像的量度成反幂比例。

若令空间单位长度在校正图像中的度量为 d 个像素,径向畸变函数表示为

$$D(r) = \sum_{j=0}^n p_j r^j \quad (13)$$

其中, $p_j (j = 0, 1, 2, \dots, n)$ 是多项式系数,则当 d 变化时,相应 $D(r)$ 每一阶系数的变化满足 $p_j d^j$ 为常数。

换句话说,对于不同的理想栅格边长 d_1 和 d_2 , 它们对应的畸变函数系数满足

$$p_{1j} = \frac{p_{2j}}{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^j}, j = 0, 1, 2, \dots, n \quad (14)$$

证明 对于任意选择的一个理想栅格特征点 Q' , 令其相对于 A' 的栅格坐标为 (m, n) , 则 Q' 的坐标由式(10)、式(12)得

$$\begin{pmatrix} x_{Q'} \\ y_{Q'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} m - \lambda_x \\ n - \lambda_y \end{pmatrix} \quad (15)$$

在理想图像中取极坐标系以 $P'(x_{P'}, y_{P'})$ 为原点, Q' 的矢径坐标为

$$\begin{aligned} r_{Q'} &= \sqrt{(x_{Q'} - x_{P'})^2 + (y_{Q'} - y_{P'})^2} \\ &= d \cdot \sqrt{(m - \lambda_x)^2 + (n - \lambda_y)^2} \end{aligned} \quad (16)$$

式中, λ_x, λ_y 是由 P, A, B, C, D 的坐标决定的常数, m, n 是由 Q', A' (或 Q, A) 的相对栅格位置决定的常数。在畸变图像中取极坐标系以 $P(x_P, y_P)$ 为原点, 对应特征点 Q 的矢径坐标为

$$r_Q = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} \quad (17)$$

因此, r_Q 与 d 成正比例而 $r_{Q'}$ 保持为常数。当理想栅格边长取为 d_1 时, 令 $r_1 = r_{Q'}$, 有

$$r_{Q1} = p_{10} + p_{11}r_1 + p_{12}r_1^2 + \dots + p_{1n}r_1^n \quad (18)$$

当理想栅格边长取为 d_2 时, 令 $r_2 = r_{Q'}$, 有

$$r_{Q2} = p_{20} + p_{21}r_2 + p_{22}r_2^2 + \dots + p_{2n}r_2^n \quad (19)$$

若 $d_1 = kd_2$, 则相应地 $r_1 = kr_2$, 而 $r_{Q1} = r_{Q2}$, 比较式(18)、式(19)中的各阶系数, 得

$$\begin{aligned} p_{20} &= p_{10}, p_{21} = kp_{11} \\ p_{22} &= k^2p_{12}, \dots, p_{2n} = k^n p_{1n} \end{aligned} \quad (20)$$

或

$$p_{1j} = p_{2j}/k^j, j = 0, 1, 2, \dots, n \quad (21)$$

即式(14)成立。证毕。

因此可根据所期望得到的校正图像的分辨率大小确定相应的理想栅格边长。

定理 2 径向校正函数的系数与校正图像的量度成正比例。

证明 参见定理 1 的证明, 交换表示理想量和畸变量的符号后, 根据条件 $d_1 = kd_2$ (即 $r_{Q1} = kr_{Q2}$) 和 $r_1 = r_2$ 直接比较式(18)、式(19)得证。

3.3 标定步骤

将栅格模板尽可能放置在与成像面平行的平面中拍摄, 栅格特征点应尽可能散布于图像各处。首

先, 确定理想栅格的边长 d 以及畸变或校正函数的阶数 n , 并用适当的特征提取算法获得畸变图像中的栅格特征点及其坐标, 然后在估计畸变中心区间内按以下 4 步逐一试验每个可能的中心坐标值:

(1) 找出离本次假设的中心 P 最近的且能构成栅格的 4 个特征点, 求出相应的 λ_x, λ_y ;

(2) 构造理想栅格特征点的图像, 并求出理想特征点的坐标;

(3) 以畸变中心为原点建立极坐标系, 分别求各畸变特征点和理想特征点的矢径坐标, 获得特征矢径对;

(4) 求解根据式(8)或(9)所得的线性方程组得畸变或校正多项式的系数, 并计算记录相应的矢径均方误差值; 或分别以理想矢径坐标和畸变矢径坐标为自变量和因变量或反之, 进行最小均方误差多项式拟合, 求出畸变或校正多项式的系数, 并记录拟合误差。

最后, 取所有试验值中使矢径均方误差达到最小值的那个畸变中心位置作为其最佳估计, 相应求出的多项式系数作为畸变或校正函数的最佳估计。

为避免逐点试验畸变中心的庞大计算量, 在具体实现时, 可先在图像中间部分较大范围内, 以较大的取值步长试验畸变中心的位置, 然后在达到最小误差值的位置附近较小一些的范围, 以较小的取值步长试验, 如此逐步缩小取值范围和步长, 直至达到所希望的位置精度。

因为特征点一般不会正好位于畸变中心, 为了满足 $D(0) = 0$, 应在特征矢径对集合中增加 $(0, 0)$ 。

4 实验与结论

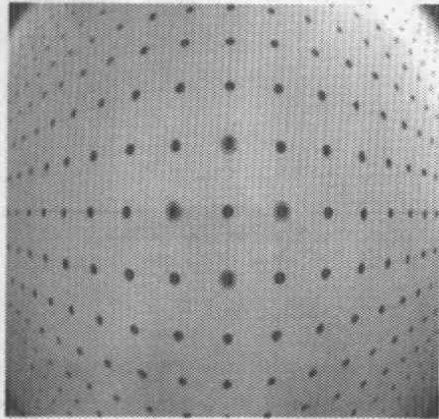
图 2 是通过鱼镜头摄下的两幅图像^[10], 可从 <http://www.adires.com/~castleman/DIP/proj-02.html> 获得。实验利用了 Matlab 工具, 并使用了其提供的 polyfit 函数。注意图像中的栅格不是正方形的, 这是因为拍摄该图的摄像机成像阵列纵横比不等于 1, 所以在标定时应将它考虑进去。

分别将畸变函数近似为 2、3、4 和 5 阶多项式。图 3 所示是仅用图像中间部分的特征点估计参数得到的校正结果; 图 4 所示是用几乎全部的特征点估计参数得到校正结果, 表 1 是对应于图 4 的标定结果。最后, 图 5 给出了图 2 的校正图像。

从示例以及其他若干实验图像的数据中可得出以下结论:

(1)畸变多项式的阶数对畸变中心位置没有显著影响,但对校正结果有相当的影响,即 2 阶拟合在矢径较小和较大时的拟合误差都很大;3 阶拟合时特征点增加反而导致图像中部的校正误差增加,这

是因为强制矢径对(0,0)对均方误差的贡献随特征点数增加而降低;而 4 阶和 5 阶拟合由于余项减少而使误差降低,都达到了满意的结果。使用更高的阶数计算量将增加许多。

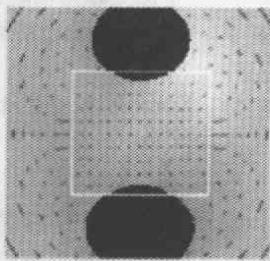


(a) 标定模板

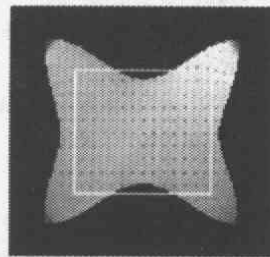


(b) 待校正场景

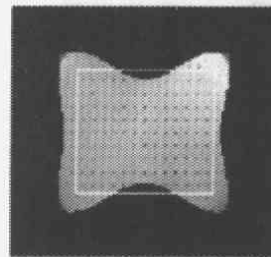
图 2 畸变图像



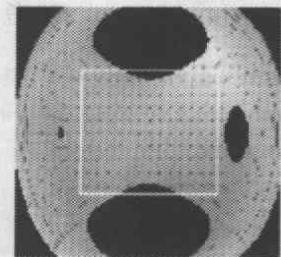
(a) 2 阶拟合



(b) 3 阶拟合

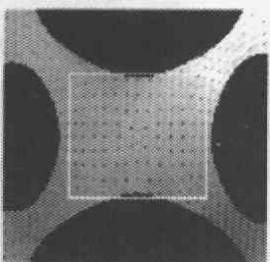


(c) 4 阶拟合

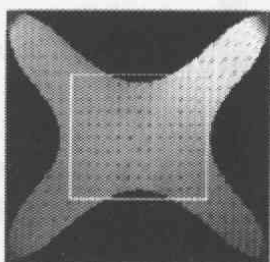


(d) 5 阶拟合

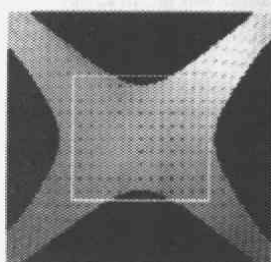
图 3 用 105 个特征点对模板校正结果,校正图像与原图大小一致。全图显示的是理想栅格边长为 20 像素时的结果,白框内是理想栅格边长为 40 像素时的结果



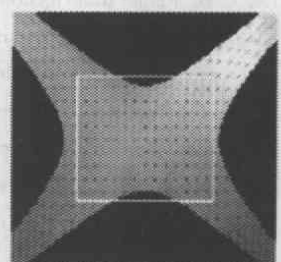
(a) 2 阶拟合



(b) 3 阶拟合



(c) 4 阶拟合

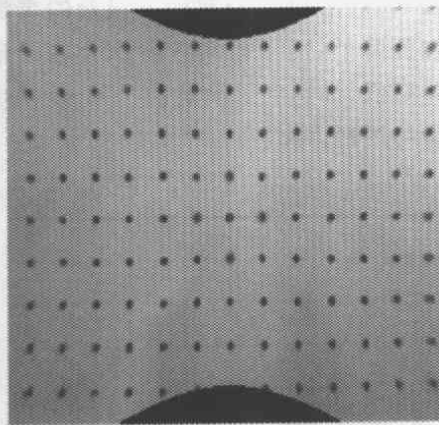


(d) 5 阶拟合

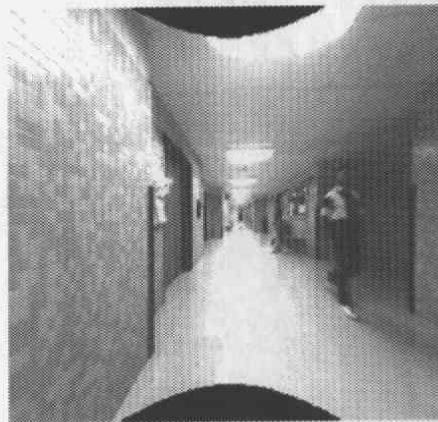
图 4 用 248 个特征点对模板校正结果,校正图像与原图大小一致。全图显示的是理想栅格边长为 20 像素时的结果,白框内是理想栅格边长为 40 像素时的结果

表 1 畸变中心和畸变函数的最佳估计值(248 个特征点)

函数阶数	最小均方拟合误差	畸变中心	畸变函数系数					
			0 次项	1 次项	2 次项	3 次项	4 次项	5 次项
2	0.311 61	(260.90,245.79)	0.191 73	2.025 9	-1.078 0			
3	0.037 032	(260.59,245.41)	0.036 928	3.262 6	-3.544 5	1.370 9		
4	0.010 504	(260.55,245.50)	-0.010 172	3.908 7	-5.860 8	4.367 3	-1.265 2	
5	0.010 402	(260.56,245.50)	-0.011 671	3.944 2	-6.064 1	4.821 6	-1.697 6	0.146 97



(a) 校正后的模板



(b) 校正后的场景

图5 校正结果(5阶拟合、理想栅格边长40像素、248个特征点)

(2)所选特征点应尽可能分布于畸变图像各处——图3所用的特征点较少且集中于图像中部,所以在外围(特别是四角)矢径值较大的地方因没有数据约束而产生了较大的误差。

参考文献

- 1 Devernay F, Faugeras O. Straight lines have to be straight: automatic calibration and removal of distortion from scenes of structured environments[J]. *Machine Vision and Applications*, 2001, **13**(1):14~24.
- 2 Swaminathan R, Nayar S K. Non-metric calibration of wide-angle lenses and polycameras[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2000, **22**(10):1172~1178.
- 3 Tsai R Y. A versatile camera calibration technique for high-accuracy 3D machine vision[J]. *International Journal of Robotics and Automation*, 1987, **3**(4):323~344.
- 4 Lee C B. Radial undistortion and calibration on an image array [D]. Electrical and Computer Science Dept., Massachusetts Institute of Technology, 2000.
- 5 Bräuer-Burchardt C, Voss K. Automatic lens distortion calibration using single views[A]. In: G. Sommer, N. Krüger, C. Perwass, eds. *Mustererkennung 2000. Proceedings of DAGM-Symposium [C]*, Kiel, Germany, Informatik Aktuell Springer, 2000:187~194.
- 6 Du P, Zhang Z. Geometric transformation of pinched hallways (Course project, 2001) [EB/OL]. <http://www.eng.iastate.edu/ee528/Projects/Project1-s2001/results/pandu/EE528project1.PDF>, 2003-03-28.
- 7 Fiala M. Automatic extraction of radial distortion parameters [EB/OL]. <http://www.cs.ualberta.ca/~fiala/radfind.htm>, 2003-03-28.
- 8 Hartley R, Zisserman A 著. 计算机视觉中的多视图几何[M]. 韦穗等译,合肥:安徽大学出版社,2002:130~132.
- 9 Farid H, Popescu A C. Blind removal of lens distortion[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2001, **18**(9):2072~2078.
- 10 Castleman K R 著. 数字图像处理[M]. 朱志刚等译,北京:电子工业出版社,1998:106~108.



孔 斌 1967年生,现为中国科学院合肥智能机械研究所智能技术研究中心副研究员,中国科学技术大学自动化系博士研究生。主要研究方向为计算机视觉和图像处理。



方廷健 1939年生,博士生导师,研究员,1962年于浙江大学工业自动化专业毕业。主要研究方向为模式识别和智能计算。曾获中国科学院和安徽省科技进步奖各一项。在国内外发表论文50余篇。