第9卷 第2期　　河海大学机械学院学报　　Vol. 9 No. 2
1995年6月　　JOURNAL OF COLLEGE OF MECH ENG HOHAI UNIVERSITY　　June 1995

相对运动的观点在解决大学物理力学问题中的应用

方前锋　丁永旺
（理化教研室）

B **摘　要**　本文通过具体的实例分析，阐述了在寻找物体间的相互关系或物体各运动量间的相互关系中相对运动的观点所起的重要作用。

关键词　相对运动；参照系；力学问题

0　引言

在大学物理中，解决力学问题时，参照系的选择非常重要，选择好的参照系，物体间的相互关系就非常清楚。相反，参照系选择得不好，物体间的相互关系就很难把握住。但是，选择不同的参照系，所得到的运动描述会完全不同。正因为如此，在大学物理中，由于涉及的力学问题比较简单，所以在解决问题时，往往只选定一个参照系后（一般是地球参照系），很少变换参照系考虑。辩证唯物主义认为，要全面地认识一个事物，得从多方面去观察。所以在解决力学问题时，适当地变换参照系，将有助于对问题的认识，有助于把握住在某个参照系中不甚明了的物体间的相互关系。

相对运动的规律讨论的是在不同参照系中运动描述的相互关系，具体地说就是，物体A相对于物体C的运动等于A相对于物体B的运动加上B相对于C的运动。用数学式子来表达就是，如设A相对于C的速度和加速度分别为$\vec{v}_A$，$\vec{a}_A$，B相对于C的为$\vec{v}_B$，$\vec{a}_B$，A相对于B的为$\vec{v}'_A$，$\vec{a}'_A$，则有

$$\vec{v}_A=\vec{v}'_A+\vec{v}_B \qquad \vec{a}_A=\vec{a}'_A+\vec{a}_B$$

而所谓相对运动的观点就是利用相对运动的规律，在解题过程中灵活地变换参照系，更好地把握住问题的实质及物体间的相互关系。

绝大多数学生在解大学物理中的力学问题时，用隔离体法进行力的分析一般是没有问题的，利用牛顿定律列出方程式也没多大问题。问题出在寻找各物体间的相互关系或物体各运动量间的相互关系上。这和不能灵活应用相对运动的观点来解题有一定的关系。我们曾用相对运动的观点来讲解多普勒效应，收到了浅显易懂的效果[1]。下面通过具体的实例说明怎样应用相对运动的观点来寻找力学问题中物体间的相互关系，或称约束条件。

1　应用实例

1.1　在质点力学中的应用

例1　如图所示，已知A为定滑轮，B为动滑轮，a、b、c三物体的质量分别为m_1、m_2、m_3，忽略滑轮及绳的质量和一切摩擦，求a、b、c的加速度及绳的张力T_1、T_2。

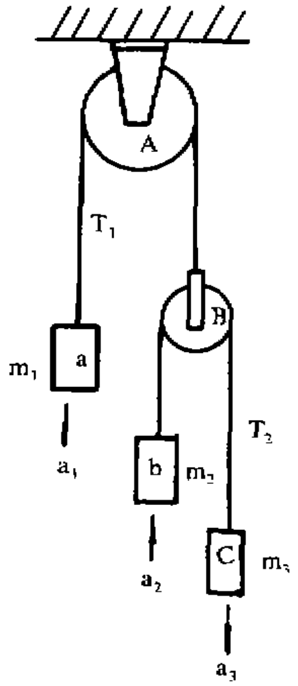

图1

解：以地球为参照系，设三物体的加速度分别为a_1、a_2和a_3，方向如图所示。由受力分析图(略)，可对三个物体分别应用牛顿定律写出三个方程：

$$\begin{cases} m_1g-T_1=m_1a_1 \\ T_2-m_2g=m_2a_2 \\ m_3g-T_2=m_3a_3 \end{cases}$$

可见，有五个待求未知数(T_1、T_2、a_1、a_2、a_3)，而只有三个独立的方程。所以，还得寻找两个独立的约束条件，此问题才能得到解决。

首先，由于滑轮及绳子的质量不计，所以应有：$T_1=2T_2$。另一个约束条件到哪里去找呢？我们知道，物体a的加速度与动滑轮B的加速度大小是相等的，而物体b与物体c的加速度大小不等。这是因为在地球参照系中滑轮A不动而滑轮B在加速运动的缘故。但是，如果以滑轮B为参照系来考虑，滑轮B不动，所以物体b和物体c的加速度应是大小相等的。(注意：此处我们只应用运动学关系，如果应用牛顿定律，得引进惯性力。)由相对运动规律，物体b和c在B参照系中的加速度a_2'、a_3'与它们在地球参照系中的加速度a_2、a_3和B在地球参照系中的加速度a_1有关系：

$$a_2'=a_2-a_1,\quad a_3'=a_3+a_1$$

所以由$a_2'=a_3'$得到另一个约束条件

$$a_2-a_1=a_3+a_1，即\ a_2-a_3=2a_1$$

联立三个牛顿方程和二个约束条件，解得：

$$\begin{cases} a_1=\dfrac{g}{Q}[m_1(m_2+m_3)-4m_2m_3] \\ a_2=\dfrac{g}{Q}[m_1(3m_3-m_2)-4m_2m_3] \\ a_3=\dfrac{g}{Q}[m_1(m_3-3m_2)+4m_2m_3] \\ T_1=\dfrac{g}{Q}8m_1m_2m_3 \\ T_2=\dfrac{g}{Q}4m_1m_2m_3 \end{cases}$$

其中$Q=m_1(m_2+m_3)-4m_2m_3$为公分母

值得注意的是，$a_1=0$的条件不是$m_1=m_2+m_3$，而是$m_1(m_2+m_3)=4m_2m_3$。

例2：如图所示，一个质量为M的三棱柱放在光滑水平面上，其光滑斜面上放一物体，质量为m，斜面倾角为θ，求二者的加速度及相互的正压力N。

解：受力分析如上图（文字叙述略）。以地球为参照系，建立上述直角坐标系。设 m 相对于地球的加速度为 a_x，a_y，M 相对于地球的加速度为 a，方向如图。应用牛顿定律列出方程：

$$\begin{cases} -N\sin\theta = ma_x \\ N\cos\theta - mg = ma_y \end{cases} \qquad \begin{cases} N\sin\theta = Ma \\ N_0 - N\cos\theta - Mg = 0 \end{cases}$$

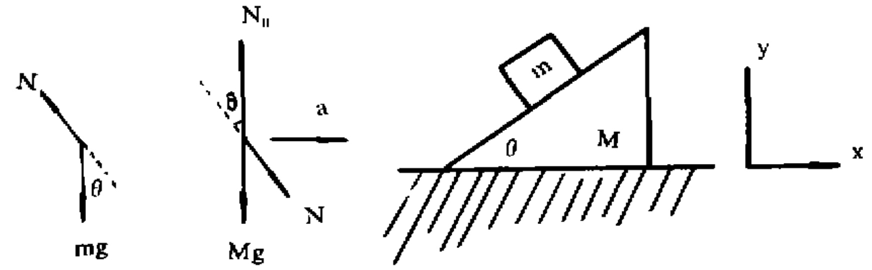

图 2

可见，对于 5 个未知数（a，a_x，a_y，N，N_0）只有四个独立的方程。所以还得寻找一个约束条件。从题意知，m 被约束在 M 的斜面上运动。由于 M 相对地球运动，所以 m 的运动方向与水平面的夹角不再是 θ，而应大于 θ，但夹角的大小未知（这就是 m 的加速度有二个未知量 a_x，a_y 的原因）。如果 M 不动，则 m 的运动平面与水平面的夹角将为 θ。所以，如果以 M 为参照系，则 m 的运动方向与水平面的夹角为 θ，也就是说，如果设 m 相对于 M 的加速度为 a'_x、a'_y，则有 $a'_y/a'_x = tg\theta$（加速度方向与水平面夹角为 θ）。由相对运动规律知，地球参照系和 M 参照系中各运动量之间的关系为

$$a'_x = a_x - a, \qquad a'_y = a_y$$

所以得到约束条件为：$a_y = (a_x - a)\cdot tg\theta$

联立五个独立方程，解之得：

$$\begin{cases} a = \dfrac{mg\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta} \\ a_x = -\dfrac{Mg\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_y = -\dfrac{(M+m)g\sin^2\theta}{M + m\sin^2\theta} \\ N = \dfrac{Mmg\cos\theta}{M + m\sin^2\theta} \end{cases}$$

可见，$a_y/a_x = \dfrac{M+m}{M} tg\theta > tg\theta$

1.2 在刚体平面运动中的应用

刚体的平面运动可分解为质心的平动及刚体绕质心的转动。通过受力分析，很容易写出质心的牛顿定律方程式及绕质心的转动定律方程式。仅仅这些方程往往不能完全解决问题，还得找出由于约束条件所决定的质心运动速度（加速度）与刚体绕质心转动的角速度（角加速度）之间的关系。实践证明，相对运动的观点在寻找这种关系时也是非常有用的。

例 3：如图所示，一长为 l 的刚性杆，质量为 m，在一光滑水平面上由竖直位置自然倒下。求杆的质心速度和杆的角速度。

解：杆在倒下过程中，由于在水平方向未受外力作用，所以质心只沿铅直方向运动，即质心速度 v_c 的方向铅直向下。又由于支承力不作功及无摩擦阻力，机械能守恒，有：

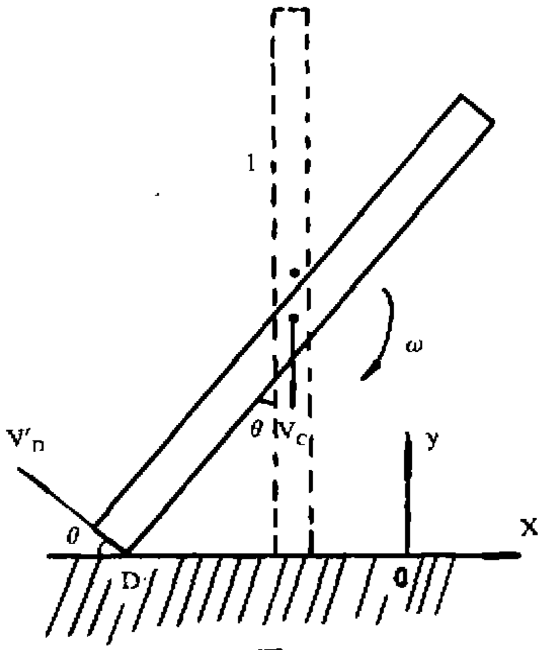

图 3

$$\frac{1}{2}mgl=\frac{1}{2}mgl\cos\theta+\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{2}J\omega^2$$

其中 ω 是杆绕质心转动的角速度，J 为杆绕质心转动的转动惯量，$J=\frac{1}{12}ml^2$。

为了求出在杆与铅垂线的夹角为 θ 时的 v_c 和 ω 两个未知数，还得寻找一个约束条件。这里的约束条件是杆在倒下过程中，其下端点 D 始终不脱离水平面，即被约束在水平面内运动。

从地球参照系来看，设杆的下端点 D 的速度为 v_x、v_y。则约束条件可表示为 $v_y=0$。

从质心参照系来看，D 点绕质心作圆周运动，角速度为 ω。所以，D 点的速度大小为：$v'_D=\frac{1}{2}\omega l$，方向与水平面夹角为 θ（如图所示），其在 x 轴和 y 轴上的分量分别为：

$$v'_x=-\frac{1}{2}\omega l\cos\theta,\quad v'_y=\frac{1}{2}\omega l\sin\theta$$

由相对运动规律知，(v_x,v_y)，(v'_x,v'_y) 和 v_c 三组运动量之间有关系：

$$v_x=v'_x,\qquad v_y=v'_y-v_c$$

由约束条件 $v_y=0$ 得：$v_c=v'_y=\frac{1}{2}\omega l\sin\theta$。

所以可求得 v_c 和 ω 分别为

$$\begin{cases}\omega=2\sqrt{\dfrac{3g(1-\cos\theta)}{l(1+3\sin^2\theta)}}\\ v_c=\sin\theta l\sqrt{\dfrac{3g(1-\text{con}\theta)}{l(1+3\sin^2\theta)}}=\sin\theta\sqrt{\dfrac{3gl(1-\cos\theta)}{1+3\sin^2\theta}}\end{cases}$$

当杆完全倒下时，$\theta=90°$。此时杆的下端点 D 的速度为零，质心 C 的速度为 $v_c=\frac{1}{2}\sqrt{3gl}$。

例 4：如图所示，板的质量为 M，受水平力 F 的作用沿水平面运动，板与平面间的摩擦系数为 μ_0，在板上放一质量为 m 的实心圆柱，此圆柱相对板只滚动而不滑动，求板的加速度。

解：受力分析如上图（文字叙述略）。以地球为参照系，设板的加速度为 a_1，圆柱体的质心加速度为 a_2，绕质心的转动加速度为 β，方向分别如图所示。应用牛顿定律和转动定律列出下列方程式

$$\begin{cases} N_1-N_2-Mg=0 \\ F-f_2-\mu_0N_1=Ma_1 \\ N_2-mg=0 \\ f_2=ma_2 \\ f_2R=\frac{1}{2}mR^2\beta \end{cases}$$

式中 R 为圆柱体的半径。

消去三个未知力(N_1、N_2 和 f_2)得

$$\begin{cases} F-\mu_0(M+m)g=Ma_1-ma_2 \\ 2a_2=R\beta \end{cases}$$

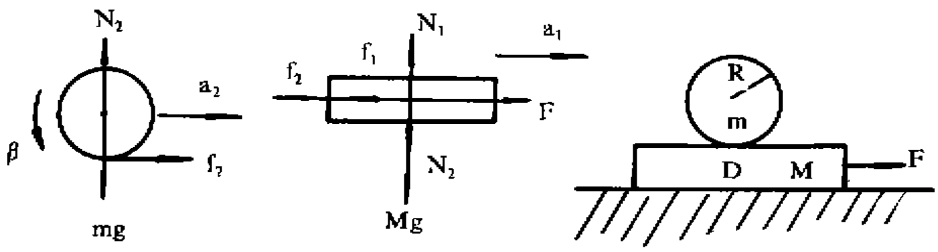

图 4

可见，对三个未知的运动学参量(a_1、a_2、β)只有两个独立的方程，仍要由约束条件再写出一个独立的等式。此问题中的约束条件是圆柱体相对于板作纯滚动。怎样用等式来表述这一约束条件呢？圆柱体相对于板作纯滚动就是说圆柱体与板的接触点 D 相对于板无滑动，即接触点 D 相对于板的加速度无水平方向分量，只有竖直方向分量。

接触点 D 一方面随质心一起运动，同时参加刚体绕质心的转动。设 D 点对地加速度的水平分量为 a_x(x 轴正向与 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$ 同向)，D 点相对于板的加速度在水平方向的分量为 a'_x。由相对运动的规律，可得

$a_x=a_2+\beta R$，　　$a'_x=a_x-a_1$

由约束条件 $a'_x=0$ 得 $a_1=a_2+\beta R$。

联立三个独立方程，解得

$$\begin{cases} a_1=3[F-\mu_0(M+m)g]/(m+3M) \\ a_2=[F-\mu_0(M+m)g]/(m+3M) \end{cases}$$

如果圆柱体与板间的最大静摩擦系数为 μ_m，则圆柱体相对于板作纯滚动的条件为

$f_2=ma_2\leqslant\mu_m mg$

即　$F-\mu_0(M+m)g\leqslant\mu_m(m+3M)g$。

3 结论

由上面的讨论可以看出，在利用牛顿定律及其推导定律(如动能定理、机械能守恒定律、动量守恒定律、转动定律等)解决力学问题时，关键之点是要找出隐含的约束条件，并利用约

束条件写出等式、相对运动的观点在这方面可起很大的作用。只要我们能够掌握和应用相对运动的观点，在解题过程中根据需要灵活地选择参照系，我们就能思路开阔，绝大多数以前不甚明了的问题也能一目了然，迎刃而解。

参 考 文 献

1 方前锋，丁永旺. 物理通报，1992(2)，16

Application of the View—point of Relative Movement in Solving Mechanical Problems of Physics for colleges and Universities

Fang Qiafeng Ding Yongwang

Abstract In this paper, the authors explicate the important role of the viewpoint of relative movement in searching for the interrelations between bodies or their movement parameters through a concrete analysis of examples.

Keywords relative movement; reference system; mechanical problem