维普资讯 http://www.cqvip.com

第6卷第1期 水利电力机械电子技术 Vol.6 No.1
1992年3月 MACH. & ELEC. TECH. WATER CONSERVANCY & ELEC. POW. Mar.1992

12—17

有铁磁介质时的自感和互感

方前锋
（理化教研室） TM271.014

摘 要

本文讨论了有铁磁介质存在时的自感和互感现象，给出了普遍情况下自感系数和互感系数的定义，通过分析得出了一些有趣的结论。

关键词：铁磁质；自感；互感

0 前言

一般教科书中对自感和互感的讨论大多局限于非铁磁介质的情况。但在实际应用中，为了增大自感和互感，一般都在线圈中加入铁磁质。所以有必要对铁磁介质存在时的自感和互感作一讨论。

1 自感系数和互感系数的定义

在教科书中，当无铁磁介质时，自感系数是这样定义的：一个线圈所产生的磁场通过这个线圈的磁通量φ与这个线圈的电流I成正比，比例系数就是自感系数L，即$L=\varphi/I$。当有铁磁质存在时，自感系数这样定义：自感系数为自感应电动势ε除以电流的时间变化率，即$L=-\varepsilon/dI/dt$，负号表示ε与dI/dt异号。

乍看之下，这两种定义式差别很大，无共同之处。实际上，后面一种定义是普适的，它隐含了前一种定义。在我们将后一种定义式变换成另外一种形式后将更清楚地看到这一点。

由法拉第电磁感应定律知，自感电动势与通过此线圈的磁通量φ之间有如下关系：$\varepsilon=-d\varphi/dt$，负号表示ε与$d\varphi/dt$异号。代入后一种定义得：

$$L=-\varepsilon/dI/dt=d\varphi/dt/dI/dt=d\varphi/dI$$

维普资讯 http://www.cqvip.com

可见，自感系数也可定义为磁通量φ随电流I的变化率。显然，这样一种定义式（与$L=-\varepsilon/dI/dt$完全相同）包含了无铁磁质时的L的定义，因为当无铁磁质时，φ与I成正比，所以，$L=d\varphi/dI=\varphi/I$。

由于自感系数定义式$L=d\varphi/dI$显含了教科书中的两种定义，笔者认为是一种较好的关于L的定义式。学生也容易明白，因为从定义式$L=\varphi/I$过渡到$L=d\varphi/dI$与匀速运动时的速度定义$v=x/t$过渡到加速运动时的$v=dx/dt$是完全类似的。

同理，对于互感系数，我们也可写出下述定义式：

$$M_{ij}=\frac{d\varphi_{ij}}{dI_i}$$

其中I_i为第i个线圈中的电流，φ_{ij}为第i个线圈产生的磁场穿过第j个线圈的磁通量，M_{ij}为第i个线圈对第j个线圈的互感系数。

2　计算举例

例1：如图所示的长直螺线管，截面积为s，长为l，绕有N匝线圈，里面充满铁磁介质，求其自感系数。

解：设给线圈通以电流i，线圈内的磁场为：

$$B=\mu_r\mu_0 ni=\mu_r\mu_0\frac{N}{l}i$$

该磁场穿过线圈的磁通量φ为：

$$\varphi=NBS=\mu_r\mu_0\frac{N^2s}{l}i=n^2V\mu_0\mu_r i$$

自感系数L为

$$L=\frac{d\varphi}{dI}=\frac{d\varphi}{di}=n^2V\mu_0(\mu_r+i\frac{d\mu_r}{di})$$

式中$n=N/l$为单位长度上的线圈匝数，$V=sl$为螺线管体积。

由于铁磁质的相对磁导率与i有关，所以充以铁磁质的螺线管的自感系数应与i有关。显然，此时$L\neq\varphi/i=n^2V\mu_0\mu_r$，只有在$d\mu_r/di=0$时，才有$L=\varphi/i$。

例2：如图所示的两个同轴的绕向相同的长直螺线管，长为l，截面积为s，紧密地套在一起，里面充满铁磁质。线圈1绕有N_1匝，线圈2绕有N_2匝，求其互感系数。

解：设线圈1通有电流i_1，线圈2通有电流i_2，它们各自产生的磁场为B_1，B_2：

维普资讯 http://www.cqvip.com

$$B_1=\mu_0\mu_r n_1 i_1,\qquad B_2=\mu_0\mu_r n_2 i_2$$

式中$n_1=N_1/l$，$n_2=N_2/l$为单位长度的线圈匝数。

线圈1的磁场穿过线圈2的磁通量为

$$\varphi_{12}=B_1N_2S=\mu_0\mu_r n_1 n_2 i_1 V$$

线圈2的磁场穿过线圈1的磁通量为

$$\varphi_{21}=B_2N_1S=\mu_0\mu_r n_1 n_2 i_2 V$$

所以，互感系数M_{12}、M_{21}分别为：

$$M_{12}=\frac{d\varphi_{12}}{di_1}=\mu_0 n_1 n_2 V(\mu_r+i_1\frac{\partial\mu_r}{i_1})$$

$$M_{21}=\frac{d\varphi_{21}}{di_2}=\mu_0 n_1 n_2 V(\mu_r+i_2\frac{\partial\mu_r}{i_2})$$

此时，μ_r与铁磁质中磁场强度H有关，即与$(n_1i_1+n_2i_2)$有关，所以上述μ_r对电流的微分用偏导表示．可见，(M_{12}, M_{21})也与电流(i_1, i_2)有关，并且在一般情况下，$M_{12}\neq M_{21}$，只有在$d\mu_r/di=0$时，才有$M_{12}=M_{21}$。

同样，在这种情况下，$M_{ij}\neq\varphi_{ij}/i_i=\mu_0\mu_r n_1 n_2 V$，只有在$d\mu_r/di=0$时，才有$M_{12}=M_{21}=\mu_0\mu_r n_1 n_2 V$。

3 自感磁能和互感磁能

1. 自感磁能

对例1中的长直螺线管磁化时，电源要克服自感电动势作功．设电流从0增加到I_0，在此过程中电源克服自感电动势所作之功为：

$$W=-\int\varepsilon_L\cdot idt=\int L\frac{di}{dt}\cdot idt=\int_0^{I_0}Lidi=\int_0^{I_0}\mu_0 n^2V(\mu_r i+i^2\frac{d\mu_r}{di})di$$

由$\frac{d}{di}(\mu_r i^2)=2\mu_r i+i^2\frac{d\mu_r}{di}$得到

$$\mu_r i + i^2\frac{d\mu_r}{di} = \frac{1}{2}\frac{d}{di}(\mu_r i^2) + \frac{1}{2}i^2\frac{d\mu_r}{di}$$

所以：$W = \frac{1}{2}\mu_0\mu_r n^2 I_0^2 V + \frac{1}{2}\mu_0 n^2 V\int_0^{I_0} i^2\frac{d\mu_r}{di}di = W_1 + W_2$

上式中的第一项为

$$W_1 = \frac{1}{2}\mu_0\mu_r n^2 I_0^2 V = \frac{1}{2}\mu_0\mu_r n I_0 n I_0 V = \frac{1}{2}HBV$$

这是螺线管中磁场的能量，称为自感磁能，可见，电源反抗自感电动势所作的功W，一部分(W_1)转变为磁场能量贮存在磁场中，但另一部分能量(即第二项W_2)哪里去了呢？

如果我们对螺线管进行循环磁化，即磁化电流i从0变到I_0，再变到0，然后再变到$-I_0$，再变回到0，如此循环一周后，电源克服自感电动势作的功为：

$$W = \oint dW = \oint Li\,di = \oint dW_1 + \oint dW_2$$

显然　$\oint dW_1 = 0$，　所以

$$\oint dW = \oint dW_2 = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 V\oint i^2\frac{d\mu_r}{di}di$$

实验证明：$\oint dW \neq 0$，它在数值上等于磁滞回线所包围的面积。这部分能量作为热能耗散掉了，称为磁滞损耗。

所以W_2中包含了磁滞损耗能，但W_2这部分能量并不全用作磁滞损耗，这可由下面的讨论来说明。

我们从磁化曲线中知道，相对磁导率$\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H}$随$i$的变化曲线很复杂，但都出现一个峰值$\mu_{rm}$，对应的电流值为$i_m$。在峰的两侧$d\mu_r/di$反号，即当$i<i_m$时，$d\mu_r/di>0$，当$i>i_m$时，$d\mu_r/di<0$所以，如果$I_0>i_m$，则

$$W_2 = \int_0^{I_0} i^2\frac{d\mu_r}{di}di = \int_0^{i_m} i^2\frac{d\mu_r}{di}di + \int_{i_m}^{I_0} i^2\frac{d\mu_r}{di}di$$

上式中的第二项由于$d\mu_r/di<0$而小于零。这说明，在电流i从i_m到I_0的变化过程中，电源作的功W_2为负值。因为W_2中包含了磁滞损耗能，而且在i从i_m到I_0的变化过程中磁滞损耗仍在进行，所以似乎在此过程中W_2不应小于零。W_2为负值的结果说明在i从i_m到I_0的变化过程中贮存在螺线管内的能量释放出来一面补偿磁滞损耗所消耗的能量，一面对电源作功。对螺线管来说，磁场能量$1/2BHV$由电源的功W_1提供，与W_2无关，再说$1/2BHV$当i增加时也是一直增加的(H，B都随i的增加而增加)，不可能再对电源作功。所以，W_2为负值的可能解释是：在

电流从0到i_m变化过程中电源作的功W_2一部分作为磁滞损耗耗散掉，另一部分则被贮存在螺线管中，这部分贮存的能量在i从i_m到I_0变化的过程中释放出来，一面提供磁滞损耗能，一面对电源作功，使电源对螺线管作的功为负值。这部分能量不是贮存于磁场中，而是作为一种弹性势能贮存在磁化的铁磁介质中，是介质的弹性势能。实际上，铁磁质磁化时，磁畴运动引起晶格畸变，使得铁磁质沿磁化方向产生伸长或收缩的宏观变形。变形的结果在铁磁质内部建立起应力、应变场，贮存了一定数量的弹性能，这种现象称为磁致伸缩。

由此可见，电源反抗自感电动势所作的功可分为三部分，第一部分作为自感磁能被贮存在磁场中，第二部分作为弹性势能贮存在铁磁介质中；第三部分由于磁滞损耗而以热能的形式耗散掉了，这三部分能量在自感系数的表达式中都有相应的反映。

2. 互感磁能

对例2中的两个长直螺线管线圈，设线圈1中的电流为I_1，线圈2中的电流为I_2。电源在建立电流I_1，I_2的过程中克服互感电动势ε_{12}，ε_{21}作的总功为

$$
\begin{aligned}
W &= -\int \varepsilon_{21} i_1 dt - \int \varepsilon_{12} i_2 dt \\
&= \int_0^{I_1} M_{21} i_1 di_2 + \int_0^{I_1} \varepsilon_{12} i_2 di_1 \\
&= \mu_0 n_1 n_2 V \int_0^{I_1 I_2} \left(\mu_r i_1 di_2 + i_1 i_2 \frac{\partial \mu_r}{\partial i_2} di_2 + \mu_r i_2 di_1 + i_1 i_2 \frac{\partial \mu_r}{\partial i_1} di_1\right) \\
&= \mu_0 n_1 n_2 V \int_0^{I_1 I_2} d(\mu_r i_1 i_2) \\
&= \mu_0 n_1 n_2 V \mu_r I_1 I_2 \\
&= \mu_0 \mu_r n_1 I_1 n_2 I_2 V \\
&= B_1 H_2 V \\
&= B_2 H_1 V \\
&= \frac{1}{2}(B_1 H_2 + H_1 B_2) V
\end{aligned}
$$

可见，此功W为两线圈磁场互相重迭后交互作用的能量，这部分能量贮存在磁场中，为互感磁能。与自感的情况不同，电源克服互感电动势所作的功全部作为互感磁能贮存在磁场中，而没有转化为弹性势能和热能。这是因为电源克服互感电动势作功的过程不引起铁磁介质的磁化（磁化是在电源克服自感电动势作功的过程中产生的），因此不会引起磁致伸缩和磁滞损耗，也就不会产生弹性势能和热能。

值得注意的是，不论是自感磁能还是互感磁能，在有铁磁质的情况下，它们都不能写成无铁磁质时的形式即$W_{自}=LI^2/2$和$W_{互}=MI_1I_2$。

4　自感系数的正负

在无铁磁质时，我们说自感系数不可能小于零。因为在那种情况下，自感系数L为一常数，如果L<0，则自感电动势与电流变化率同号，即电流增加时，自感电动势将促使它增加。这样的话，只要有一微小的扰动使电流增加，则自感电动势就会促使电流一直增加下去直

维普资讯 http://www.cqvip.com

维普资讯 http://www.cqvip.com

至烧毁线圈，这显然是不可能的. 所以我们说L不小于零。（互感系数是可以大于、小于零的，这取决于线圈之间的相互位置。）

在铁磁质存在时情况怎样呢？对例1中的长直螺线管，$L=\mu_0 n^2 V(\mu_r+i\frac{d\mu_r}{di})$，另外，我们知道在$\mu_r \sim i$曲线的峰值右侧$i>i_m$处，$d\mu_r/di<0$，所以，似乎有可能在某一电流范围内使式子$\mu_r+i\frac{d\mu_r}{di}<0$得到满足，而使$L<0$，但是，这也是不可能的，我们可以证明，在铁磁质存在的情况下，L也不可能小于零。

回到L原始的定义，我们有

$$L=\frac{d\varphi}{di}=\frac{d}{di}(N\int_S \vec{B}\cdot d\vec{s})=N\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial i}d\vec{s}$$

式中面积分是对线圈截面的积分，N为线圈匝数，因为在线圈截面上$\vec{B}$可能是变化的，所以$\vec{B}$是空间位置和电流的函数，$\vec{B}$对i的变化率用偏导表示。

从磁化曲线我们知道，磁感应强度$\vec{B}$是随磁场强度$\vec{H}$(或i)的增加而增加的（尽管是非线性的），所以在磁化过程中$\partial\vec{B}/\partial i>0$，另外，线圈的磁场方向与线圈截面法向(以电流流向按右手螺旋法则规定)之间的夹角总是$<90°$，因此，在磁化过程中

$$L=N\int_S \frac{\vec{B}}{i}\cdot d\vec{s}>0$$

此结论也是楞次定律和法拉第电磁感应定律普遍适用的直接结果。

Self-induction and Inter-induction In the Ferro-magnetic Medium

Fang Qianfeng

Abstract

In this paper, the phenomena of the self-induction and inter- induction in the feromagnetic medium are discussed. The self- induction and inter -induction factors are re-defined in universal situation.Severul interesting results are obtained through analysis

Key Words: *Ferro-magnetic medium; Self-inductrien; inter-induction*