

低杂波电流驱动数值模拟*

丁伯江 匡光力 刘岳修 沈慰慈 俞家文 石跃江

(中国科学院等离子体物理研究所, 合肥 230031)

(2001 年 12 月 18 日收到; 2002 年 1 月 27 日收到修改稿)

通过求解二维 Fokker-Planck 方程, 得到了 HT-7 托卡马克低杂波驱动电流随时间的演化关系及其空间分布, 理论值与实验结果基本符合, 为 HT-7 托卡马克实验提供了理论依据. 通过解电流扩散方程, 考虑了快电子的径向扩散效应对驱动电流的影响.

关键词: 低杂波电流驱动, 数值模拟, 径向扩散

PACC: 5250, 5265, 5240D

1. 引 言

利用低杂波实现驱动电流已经成为托卡马克装置上实现稳态运行的一种有效辅助手段. 为了更好地为实验提供理论依据, 求解驱动电流的数值模拟十分重要. 传统的方法有两种: 一种是使用一维 Fokker-Planck 方程求解电子的分布函数, 而忽略了垂直方向速度的变化; 另一种是即使使用了二维速度空间的 Fokker-Planck 方程求解电子的速度分布函数, 但是假设射频波导致的电子的准线性扩散系数在一定的速度空间内是一个常数, 这显然不合理. 本文在原有低杂波电流驱动(LHCD)数值模拟的基础上^[1], 通过低杂波在等离子体中的传播吸收, 求得准线性扩散系数, 以此为纽带, 利用二维 Fokker-Planck 方程^[2]计算低杂波驱动电流, 得到了 HT-7 托卡马克低杂波驱动电流随时间的演化关系及其空间分布, 理论值与实验结果基本符合, 为 HT-7 托卡马克实验提供了理论依据. 此方法与传统的方法相比, 有其独特的优点.

另外, 理论和实验研究表明, 托卡马克等离子体的约束主要取决于反常的输运过程^[3,4]. 携带电流的超热电子横越磁场的径向输运将使驱动电流的分布展宽, 并使驱动电流减小. 我们知道, 由于反常的输运机理^[3]将会加快速电子的径向扩散, 因此, 在 LHCD 实验中, 低杂波驱动的快电子存在沿径向扩散和

碰撞两个过程, 二者相互作用的结果决定驱动电流的剖面形状及大小. 其特征时间分别为快电子的约束时间 τ_d 和动量弛豫时间 τ_s , 可由下式求出^[5]:

$$\tau_d \approx \frac{a^2}{D_{\text{fast}}}, \quad (1)$$

$$\tau_s = [4\pi \ln(\Lambda) n_e r_e^2 c]^{-1}, \quad (2)$$

式中 a 为托卡马克小环的半径, D_{fast} 为快电子沿半径方向的扩散系数, $\ln(\Lambda)$ 为碰撞库仑对数, n_e 为电子密度, r_e 为经典电子半径, c 为光速. 若 $\tau_s \gg \tau_d$, 则电子间的碰撞慢化过程可忽略; 相反, 若 $\tau_s \ll \tau_d$, 则快电子的径向扩散过程可忽略. 事实上, 在 HT-7 托卡马克装置上, τ_s 和 τ_d 的差别不是太大, 故两种物理过程均应考虑.

由于碰撞慢化和径向扩散之间的作用, 由低杂波在位置为半径 r' 处激发的快电子的径向扩散会引起驱动电流在位置空间扩散, 其关系式为^[5]

$$J(r) = \int \eta(r, r') W_a(r') dr', \quad (3)$$

式中 $\eta(r, r')$ 为与非局域驱动效率相关的核函数, $W_a(r')$ 为低杂波在半径 r' 处沉积的能量. (3) 式可以定性说明: 由于朗道阻尼作用, 低杂波的功率沉积在某一位位置 r' , 于是在该位置驱动一定数量的快电子, 但是由于快电子的径向扩散作用, 部分快电子会扩散到别的位置 r , 从而在功率沉积以外的位置 r 处形成一定的等离子体电流.

考虑快电子的径向扩散时, 我们采用一种简化

* 国家自然科学基金(批准号:19985005)资助的课题.

模型,即考虑由于快电子的径向扩散效应而引起的驱动电流的变化.这样,只要求解电流扩散方程就知道快电子的径向扩散效应对驱动电流的影响.

2. 准线性扩散系数

由于波与粒子的相互作用,射频波的存在导致粒子分布在速度空间扩散,从而引起电子的分布函数发生变化.求解二维 Fokker-Planck 方程,要考虑波对分布函数的改变,必须先求出射频波引起的准线性扩散系数.为简单起见,忽略 Shafranov 位移,仅以 r 表示磁通面.考虑在 $n_{//}^0$ 和 $n_{//}^0 + \Delta n_{//}^0$ ($n_{\perp} = 0$) 区间内($n_{//}^0$ 为初始平行折射率, $\Delta n_{//}^0$ 为平行折射率的变化量, n_{\perp} 为垂直折射率),一定数量的波功率 ΔP ($n_{//}^0$),在横截面为 σ 的管内,以变化的群速度 V_g 传播.在这个管子里,总的传播的能量密度 $\Delta W(n_{//}) \equiv \Delta P(n_{//})/[\sigma V_g]$ 可以表示为与振荡等离子体相干运动相关的静电能量密度和动能密度的总和,其结果为^[6]

$$\Delta W(n_{//}) = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega d_0) |\Delta E(\mathbf{r}, n_{//}, t)|^2, \quad (4)$$

式中 $d_0 = D_0(\mathbf{r}, n_{//}, \omega)/(n_{\perp}^2 + n_{//}^2)$ 为介电常量, D_0 为色散关系的实部, ω 为波的角频率, $\frac{1}{8\pi} |\Delta E(\mathbf{r}, n_{//}, t)|^2$ 为静电能量密度.

存在强磁场时,管子里某一点 \mathbf{r} 处的平行扩散系数可以表示为^[7]

$$\Delta D_{\pi}(\mathbf{r}, v_{//}, n_{//}^0) = \frac{8\pi^2 e^2 k_{//}^2}{m_e^2 k^2} \frac{\Delta W(n_{//})}{\partial(\omega d_0)/\partial \omega} \delta(\omega - k_{//} v_{//}). \quad (5)$$

考虑一个差分体积 $\Delta V(\mathbf{r})$, 其所在位置为 \mathbf{r} , 假设波包能流沿射线是无扩散的,则由该束低杂波引起的 $\Delta V(\mathbf{r})$ 内一个普通电子在速度空间的准线性扩散系数为

$$\Delta D_{\pi}(\mathbf{r}, v_{//}, n_{//}^0) = \frac{8\pi^2 e^2}{m_e^2} \frac{1}{\Delta V(\mathbf{r})} \sum_n \int_{n_n}^{n_n + \Delta n_n} \delta(\omega - k_{//} v_{//}) \frac{k_{//}^2}{k^2} \frac{\Delta P_n}{\partial(\omega d_0)_n / \partial \omega} dt, \quad (6)$$

式中积分利用射线方程的数值解^[1], 每个波束从边缘入射时的能量由 Brambilla 谱决定. (6) 式是某个波束对准线性扩散系数的贡献. 由于在计算射线轨迹时, 将整个波谱分割成若干个波束, 因此, 在求解

整个波谱对准线性扩散系数的贡献时, 必须将所有波束的贡献进行代数求和^[7] (忽略波束之间的相互影响). 于是, 得到低杂波引起的电子在速度空间的准线性扩散系数为

$$D_{\pi}(\mathbf{r}, v_{//}) = \sum_k \Delta D_{\pi}(\mathbf{r}, v_{//}, n_{//}^0). \quad (7)$$

将计算得到的准线性扩散系数代入二维 Fokker-Planck 方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} \left(D_{\pi} \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c, \quad (8)$$

式中 $\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c$ 为 Fokker-Planck 碰撞项.

3. 二维 Fokker-Planck 方程的计算

为了求解电子的分布函数, 球坐标系下的 Fokker-Planck 方程可写为^[2,8]

$$\frac{\partial f}{\partial t} = n_0 \Gamma \left\{ \frac{2}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(A f + B \frac{\partial f}{\partial v} + C \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{v^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(D f + E \frac{\partial f}{\partial v} + F \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \right\}, \quad (9)$$

式中 $\Gamma = 4\pi Z^4 e^4 / m^2$, Z 为核电荷数, e 为电子的电量, m 为粒子的质量系数, A, B, C, D, E, F 包括碰撞项和射频项的贡献. 对 (8) 式中的射频项进行坐标变换, 并运用待定系数法, 得到准线性扩散效应对各系数的贡献分别为

$$\begin{aligned} A'_c &= D'_c = 0, \\ B'_c &= D_{\pi}(\mathbf{r}, v_{//}) v^2 \cos^2 \theta, \\ C'_c &= -D_{\pi}(\mathbf{r}, v_{//}) v \sin \theta \cos \theta, \\ E'_c &= -D_{\pi}(\mathbf{r}, v_{//}) v \sin^2 \theta \cos \theta, \\ F'_c &= -D_{\pi}(\mathbf{r}, v_{//}) \sin^3 \theta. \end{aligned}$$

求解得到电子的分布函数 $f(v, \theta, t)$, 经过变换后得到 $f(v_{//}, r, t)$, 根据

$$J_{\pi}(\mathbf{r}, t) = -en_e \int_{-\infty}^{+\infty} f(v_{//}, r, t) v_{//} dv_{//} / \int_{-\infty}^{+\infty} f(v_{//}, r, t) dv_{//}, \quad (10)$$

可以得到驱动电流的大小.

4. 计算结果与分析

运用上述方法, 在 HT-7 典型的等离子体和低杂波的参数下,

$R = 122\text{cm}, a = 28.5\text{cm},$
 $I_p = 150\text{kA}, B_t = 2.0\text{T},$
 $n_{e0} = 1.5 \times 10^{13}\text{cm}^{-3}, n_{ea} = 0.5 \times 10^{12}\text{cm}^{-3},$
 $T_{e0} = 1.0\text{keV}, T_{ea} = 60\text{eV},$
 $T_{i0} = 0.8\text{keV}, T_{ia} = 40\text{eV},$
 $P_{rf} = 350\text{kW}, f = 2.45\text{GHz},$

式中 R 和 a 分别为托卡马克大半径和小半径, I_p 为等离子体电流, B_t 为纵场, n_{e0} 和 n_{ea} 分别为中心和边缘的等离子体密度, T_{e0} 和 T_{ea} 分别为中心和边缘的电子温度, T_{i0} 和 T_{ia} 分别为中心和边缘的离子温度, P_{rf} 为低杂波功率, f 为低杂波频率. 计算得到一定平行折射率情况下的低杂波射线轨迹(图 1)和平行折射率沿径向的变化(图 2).

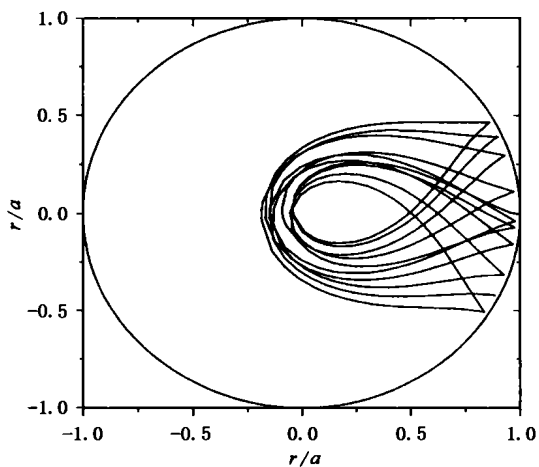


图 1 低杂波射线轨迹 ($n_{||}^0 = 2.9$) r 为径向位置, a 为托卡马克小半径

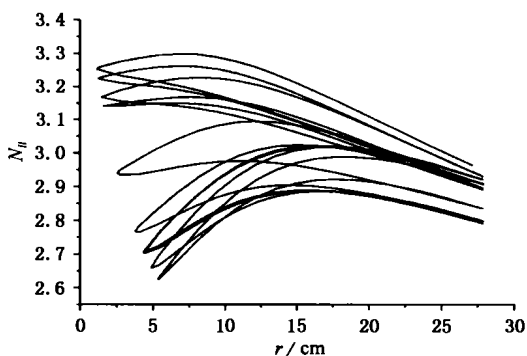


图 2 平行折射率沿径向的变化 ($n_{||}^0 = 2.9$) r 为径向位置, $N_{||}$ 为波束传播过程中的平行折射率, $n_{e0} = 1.5 \times 10^{13}\text{cm}^{-3}, T_{e0} = 1.0\text{keV}, B_t = 2.0\text{T}$

图 3 和图 4 分别给出不同子波导间相位差时的低杂波功率沉积分布和驱动电流分布. 从计算结果可以看出, 当子波导间的相位差在 $\Delta\Phi = 130^\circ$ 左右时, 低杂波驱动电流的效率 (η_{cd}) 最高, 实验结果(图 5)也证实了这一结论, 这主要是由于波的可近性条件和波的相速度的大小决定的. 在一定的纵向磁场、等离子体密度、电子温度下, 低杂波的传播及吸收主要由平行折射率的大小决定的, 而平行折射率的大小与低杂波天馈系统子波导的相位差密切相关. 如果平行折射率太小, 不满足波的可近性条件, 波就不能到达等离子体中心. 如果平行折射率太大, 则由于与外围的电子发生作用而将能量沉积在外围, 从而使得平行折射率在一定的范围内驱动效果最好.

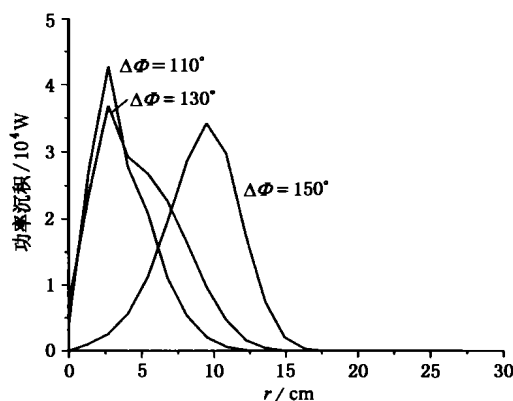


图 3 不同相位角时的功率沉积分布 r 为径向位置, $P_{rf} = 350\text{kW}$, 其余参量同图 2

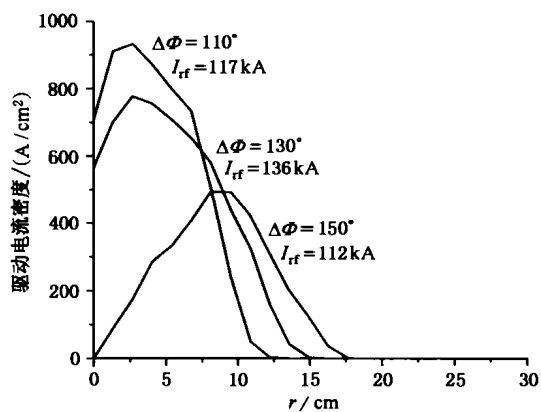


图 4 不同相位角时的驱动电流分布 r 为径向位置, I_{rf} 为波驱动的等离子体电流 $P_{rf} = 350\text{kW}$, 其余参量同图 2

驱动电流的分布以及总的驱动电流的大小随时间的演化关系分别如图 6 和图 7 所示. 从驱动电流随时间的演化关系可以看到, 在低杂波投入以后, 驱

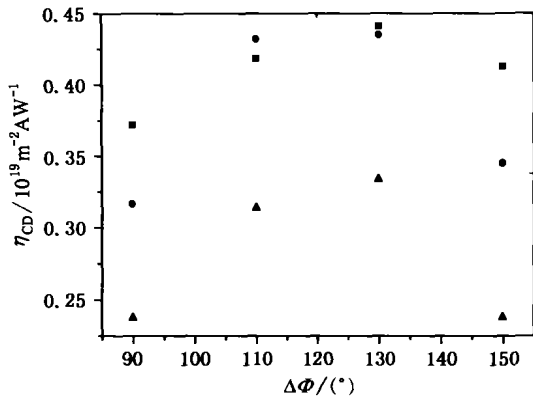


图5 驱动效率与相位角之间的关系 (HT-7 实验结果) n_e 为弦平均等离子体密度, $n_e = 1.5 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ (■), $2.0 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ (●), $2.5 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ (▲)

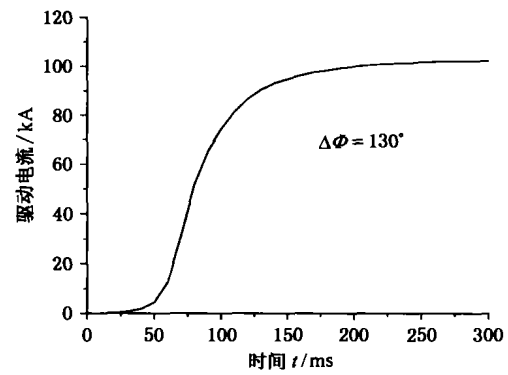


图7 驱动电流的大小随时间的演化关系 $P_{rf} = 350 \text{ kW}$, 其余参量同图2

动电流开始增加很快,随后逐渐减小,约经过 150ms 以后,驱动电流达到饱和.在低杂波驱动实验过程中,驱动电流的变化由快电子分布的变化引起,硬 x 射线随时间的演化关系即反映了快电子的分布随时间的演化关系,如果硬 x 射线达到饱和,则说明快电子的分布达到一种稳态,即驱动电流到达最大值.图 8 给出 HT-7 托卡马克 LHCD 实验过程中硬 x 射线(中心道硬 x 射线强度与所有道硬 x 射线强度总和之比)随时间的演化关系.由图 8 发现,当 $\Delta\Phi = 110^{\circ}$ (炮号:39095)时,约经过 120ms 以后,硬 x 射线辐射几乎达到饱和状态,即快电子的分布趋于稳定;当 $\Delta\Phi = 150^{\circ}$ (炮号:39097)时,约经过 200ms 以后才达到饱和状态.由此可见,模拟计算得到的驱动电流随时间的演化关系与实验上的趋势基本一致.

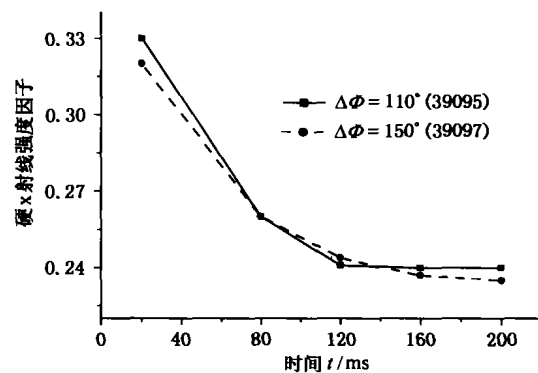


图8 LHCD 过程中硬 x 射线强度随时间的演化关系 (HT-7 实验结果) 硬 x 射线强度因子是指中心道硬 x 射线强度与所有道硬 x 射线强度总和之比

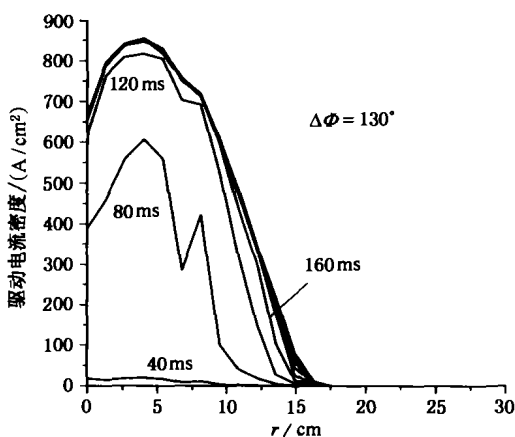


图6 驱动电流分布随时间的演化关系

5. 快电子的径向扩散

以上讨论了不考虑快电子的径向扩散效应时的低杂波驱动电流,本节将给出快电子的径向扩散效应对驱动电流的影响.

低杂波与等离子体中的电子发生朗道共振阻尼作用以后,波驱动出快电子,而这些快电子在碰撞慢化的同时,还存在径向扩散,从而引起驱动电流的径向扩散.

考虑快电子的径向扩散后,根据方程(8),电子分布函数的 Fokker-Planck 方程可写成^[9]

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} \left(D_{rf} \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial v} (v f) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r D_{fast} \frac{\partial f}{\partial r} \right), \quad (11)$$

式中等号右边第一项为准线性射频源,第二项

$\frac{\partial}{\partial v}(\nu f) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c$, 即碰撞慢化项, ν 为电子碰撞频率, 第三项为径向扩散项.

由于快电子的径向扩散系数对电子速度很不敏感, 故可假设 D_{fast} 与速度无关^[9], 在方程(11)等号两边同时乘以 $(-ev)$, 并对速度积分, 则得到

$$\frac{\partial J}{\partial t} = -e \int D_{\pi} \frac{\partial f}{\partial v} dv - e \int \nu f dv + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r D_{fast} \frac{\partial J}{\partial r} \right). \quad (12)$$

既然模拟计算时间远大于慢化时间, 考虑到驱动电流的动态平衡, 则可令 $\partial J / \partial t = 0$. 由于波驱动的携带电流的快电子速度变化范围不大, 则近似认为 ν 与速度无关, 于是

$$-e \int \nu f dv = -e \nu \int f dv = -\nu J. \quad (13)$$

至于射频源项, 其单位为(电流密度/时间), 据此, 可令

$$-e \int D_{\pi} \frac{\partial f}{\partial v} dv = \nu' J_0, \quad (14)$$

式中 ν' 为时间因子(待定), J_0 为未考虑径向扩散时波驱动的电流密度. 若不存在径向扩散时(即 $D_{fast} = 0$), 则 $J = J_0$, 而由方程(12), 得

$$\nu' J_0 - \nu J_0 = 0, \quad (15)$$

即可得到 $\nu' = \nu$, 于是方程(12)可写成电流的扩散方程^[10]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r D_{fast} \frac{\partial J}{\partial r} \right) + \nu (J_0 - J) = 0, \quad (16)$$

式中

$$\nu = \nu(r) = \ln \lambda \frac{n_e(r) e^4}{4\pi \epsilon_0^2 m_e^2 c^3} \times n_{//}^3,$$

$\ln \lambda$ 为库仑势, ϵ_0 为自由空间的介电常量. 为方便起见, 取 $n_e(r)$ 为抛物线分布, $n_{//}$ 取功率谱峰值在功率沉积最大处对应的平行折射率, 根据粒子约束时间与径向扩散系数之间的关系, 假设 $D_{fast} = a^2 / (5.8 \times \tau_d)$, 即 D_{fast} 与位置 r 无关, 于是方程(16)便可写成

$$D_{fast} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial J}{\partial r} \right) + \nu (J_0 - J) = 0. \quad (17)$$

用数值法解微分方程(17), 并取边界条件:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial r} \Big|_{r=0} &= 0, \\ J \Big|_{r=a} &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

即可得到扩散后驱动电流的分布.

6. 考虑径向扩散前后计算结果的比较

为了说明径向扩散效应对驱动电流分布的影响, 在考虑扩散前后对 HT-7 低杂波驱动电流进行了模拟计算(HT-7 典型的等离子体参数和低杂波参数如前).

根据 HT-7 的实验结果, 可估算快电子的约束时间为 $\tau_d \approx 30\text{ms}$ 当 $\Delta\Phi = 130^\circ$ 时, 其功率沉积分布如图 9 所示; 扩散前后的驱动电流分布如图 10 所示. 扩散前的驱动电流为 136kA, 扩散后的驱动电流为 105kA.

比较图 9 和图 10, 可看出未考虑快电子的径向扩散时, 驱动电流和功率沉积的位置一一对应, 即只有在功率沉积的地方才会有驱动电流, 这种驱动电流是局域性的. 但是, 考虑快电子的径向扩散后, 驱动电流变成非局域性的, 电流密度的分布展宽变平, 驱动电流减小, 驱动效率降低.

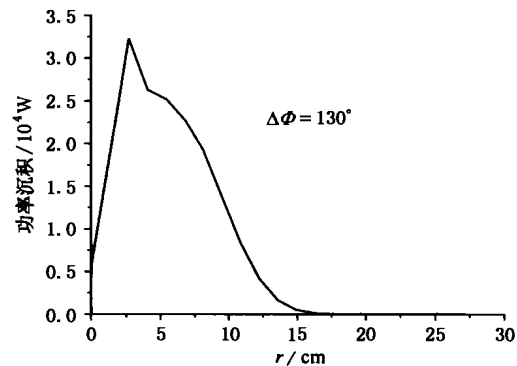


图 9 功率沉积分布 r 为径向位置, $I_p = 150\text{kA}$, $P_{\pi} = 350\text{kW}$, 其余参量同图 2

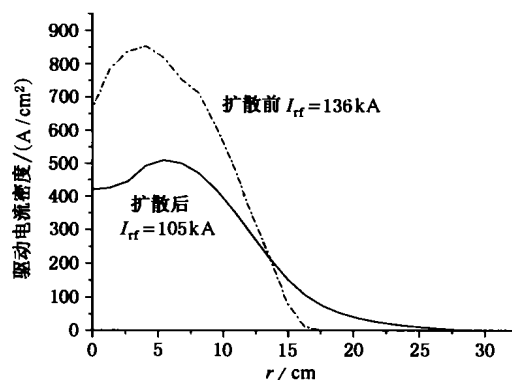


图 10 扩散前后的驱动电流分布 r 为径向位置, I_{rf} 为波驱动的等离子体电流

驱动电流的减小可以用简单的物理图像来描述.对于典型的密度和温度分布,携带电流的高能电子向外扩散的数目将比向内扩散的多,由于电子与离子的库仑碰撞正比于 $n_e/T_e^{3/2}$,一个以速度 v 向外漂移的电子将运动到一个碰撞增多的区域而迅速慢化,从而导致驱动效率下降.同时,横越边界的损失也将使驱动电流减小,高能电子的扩散使得无电流(直接由波驱动的快电子)的区域得到一定的电流,从而将整个区域的电流分布拉平.

7. 结 论

通过数值模拟计算,得到了 HT-7 托卡马克低杂波驱动电流的空间分布及其随时间的演化.当子波

导间的相位差在 130° 左右时,低杂波驱动效果最好;从驱动电流随时间的演化关系可以看到,在低杂波投入以后,驱动电流开始增加很快,随后逐渐减小,直至驱动电流达到饱和.模拟结果与实验结果基本一致,模拟结果为解释实验结果提供了有力的佐证,为 HT-7 低杂波实验提供了一定的理论指导.同时,考虑扩散以后,驱动电流变成非局域性的,电流密度的分布展宽变平,驱动电流减小,驱动效率降低.所以在实验中应尽量优化有关实验参数,如尽可能地控制磁场的涨落,以减小快电子的径向扩散效应,从而提高低杂波的驱动效率.

感谢方瑜德研究员的有益讨论.

- | | |
|---|---|
| <p>[1] Xiang N and Yu G Y 1993 <i>Acta Phys. Sin.</i> 42 679 (in Chinese)
[项农、俞国扬 1993 物理学报 42 679]</p> <p>[2] McCoy M G <i>et al</i> 1981 <i>Comput. Phys. Commun.</i> 24 37</p> <p>[3] Mynick H E <i>et al</i> 1981 <i>Phys. Fluids</i> 24 695</p> <p>[4] O'Brien M R <i>et al</i> 1991 <i>Nucl. Fusion</i> 31 583</p> <p>[5] Rax J M <i>et al</i> 1989 <i>Nucl. Fusion</i> 29 1751</p> <p>[6] Stix T H 1962 <i>The Theory of Plasma Waves</i> (New York: McGraw Hill)</p> <p>[7] Bonoli P T <i>et al</i> 1986 <i>Phys. Fluids</i> 29 2937</p> | <p>[8] Zhu X G <i>et al</i> 1998 <i>Acta Phys. Sin.</i> 47 1137 (in Chinese) [朱学光等 1998 物理学报 47 1137]</p> <p>[9] Ignat D W <i>et al</i> 1994 <i>Nucl. Fusion</i> 34 837</p> <p>[10] Ignat D W <i>et al Rep. PPPL-3158/UC-420</i></p> <p>[11] Xu J L <i>et al</i> 1981 <i>Plasma Physics</i> (Beijing: Atomic Energy Press) p580 (in Chinese) [徐家骛等 1981 等离子体物理学(北京:原子能出版社)第 580 页]</p> <p>[12] Press W H <i>et al</i> 1989 <i>Numerical Recipes in Fortran</i> (Cambridge: Cambridge University Press) p40</p> |
|---|---|

Simulation of lower hybrid current drive *

Ding Bo-Jiang Kuang Guang-Li Liu Yue-Xiu Shen Wei-Ci Yu Jia-Wen Shi Yue-Jiang

(*Institute of Plasma Physics, Chinese Academy of Sciences, Hefei 230031, China*)

(Received 18 December 2001; revised manuscript received 27 January 2002)

Abstract

Resolving the two-dimensional Fokker-Planck equation, evolutions of the driven current and its profile on HT-7 tokamak are obtained. The simulated results are nearly in agreement with the experimental data, which supplies a theoretical guidance for lower hybrid current drive (LHCD) experiments on HT-7 tokamak. In addition, the effect of radial diffusion of fast electrons on the driven current during LHCD is considered by means of solving the current diffusion equation.

Keywords: LHCD, simulation, radial diffusion

PACC: 5250, 5265, 5240D

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19985005).