

文章编号: 1001-4322(2004)07-0821-04

## 激光大气闪烁的分形分析\*

朱文越, 饶瑞中, 梅海平

(中国科学院 安徽光学精密机械研究所 大气光学实验室, 安徽 合肥 230031)

**摘 要:** 采用分形理论分析了激光大气闪烁的统计特征。研究表明:在弱起伏条件下,激光大气闪烁的分形维和奇异性随光强起伏的增强而增大,而其长期相关性则减小;不同 Fresnel 尺度下具有相同闪烁指数的激光大气闪烁的分形特征存在着明显的差别;在强起伏条件下,有限的观测数据中尚未发现分形维有饱和现象,因此可以用来描述激光大气闪烁的强度。

**关键词:** 分形维; R/S 分析; Hurst 指数; 多重分形; Fresnel 尺度

**中图分类号:** TN241 **文献标识码:** A

激光在湍流大气中传输时其光强随时间不断变化,这种光强的随机起伏被称为激光大气闪烁,一般采用光强起伏的归一化方差即闪烁指数

$$\beta_I^2 = (\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2) / \langle I \rangle^2 \quad (1)$$

来表征起伏的强度,式中尖括号 $\langle \rangle$ 表示系综平均。根据 Tatarskii 理论,在 Kolmogorov 局地均匀、各向同性湍流中存在着如下关系

$$\sigma_{\ln I}^2 = a C_n^2 k^{7/6} L^{11/6} \quad (2)$$

式中: $\sigma_{\ln I}^2$ 为光强的对数方差; $C_n^2$ 为折射率结构常数; $k$ 为波数; $L$ 为激光传输距离; $a$ 为一常数,对于球面波  $a = 0.496$ ,平面波  $a = 1.23$ 。(2)式得到了实验的证实<sup>[1]</sup>。闪烁饱和出现后,强起伏条件下激光大气闪烁的统计描述成为光传输研究的核心问题,但是到目前为止,尚未取得令人满意的成果。由 Mandelbrot 创立的分形理论在地球物理、湍流和材料科学等领域的研究中取得了丰硕成果<sup>[2, 3]</sup>,初步的分析表明<sup>[4]</sup>:分形理论也可以用于研究激光在湍流大气中传播时的光斑分布,且尚未发现存在类似于闪烁的饱和现象。由于激光大气闪烁具备了自相似分形的结构特征,因此,有可能采用分形参量(分形维和 Hurst 指数)对强起伏区的激光大气闪烁进行描述。此外,不同 Fresnel 尺度下具有相同闪烁指数的激光大气闪烁的分析讨论也尚未见公开的报道,本文将借助于分形的方法讨论以上两个问题。

## 1 光强起伏的 Hurst 指数与分形维

在时间序列的统计分析中通常假设 $\langle X^2(t) \rangle$ 存在有限值且 $X(t)$ 是短暂相关的,当数据或随机函数 $X(t)$ 远离 Gauss 分布使 $\langle X^2(t) \rangle$ 发散时,所有的二阶统计技术都是无效的。Hurst 利用改变标度范围的分析方法<sup>[5]</sup>(或称 R/S 分析)对时间序列进行了重新标度分析,其引入的常数被称为 Hurst 指数。此方法的优点是指数关于边缘分布是全面好用(robust)的,即不仅当基本数据或随机函数靠近 Gauss 分布时有效,而且当 $\langle X(t) \rangle$ 远离 Gauss 分布时继续有效,本文将采用此方法研究激光大气闪烁。

统计的 R/S 分析<sup>[3, 6]</sup>定义

$$X^*(t) = \int_0^t X(u) du, \quad X^{2*}(t) = \int_0^t X^2(u) du, \quad X^{*2} = (X^*)^2 \quad (3)$$

对不同的时间尺度 $\tau$ ,定义

$$R(\tau) = \max_{0 \leq u \leq \tau} \{X^*(u) - (u/\tau)X^*(\tau)\} - \min_{0 \leq u \leq \tau} \{X^*(u) - (u/\tau)X^*(\tau)\} \quad (4)$$

为在 $0 \sim \tau$ 时间区间中 $X^*(t)$ 的调节范围(或称滞后)。 $X(t)$ 的样本标准导数为

$$S^2(\tau) = X^{2*}(\tau)/\tau - X^{*2}(\tau)/\tau^2 \quad (5)$$

则表达式 $Q(\tau) = R(\tau)/S(\tau)$ 是 R/S 统计的。假定存在实数使得当 $\tau \rightarrow \infty$ 时, $(1/\tau^H)[R(\tau)/S(\tau)]$ 在分布上收敛于非退化的极限随机变量,则称函数 $X(t)$ 有 Hurst 指数 $H$ 。对于随机函数 $X(t)$ ,可以定义其过去与未来的

\* 收稿日期:2003-09-23; 修订日期:2004-01-20

基金项目:国家 863 计划项目资助课题

作者简介:朱文越(1976—),男,博士研究生,从事激光大气传输的湍流效应研究;合肥市 1125 信箱二室;E-mail: wyzhu@aiofm. ac. cn.

时间相关函数

$$C(t) = 2^{2H-1} - 1 \tag{6}$$

当  $H=1/2$  时,  $C(t)=0$ , 表明  $X(t)$  是一个独立的随机过程, 它过去的行为不影响将来的行为, 即通常所说的 Markov 过程。当  $H \neq 1/2$  时就有不依赖于时间的相关效应产生, 且此效应可以持续很长时间(称为长时期相关或长程相关)。当  $H > 1/2$  时,  $C(t) > 0$ , 存在着正效应。其特点是在过去某时刻发生了一个增长(或衰退)过程, 那么在将来的时刻仍然保持着这种增长(或衰退)趋势, 而且增长(或衰退)的倾向持久地保持着。当  $H < 1/2$  时,  $C(t) < 0$ , 此时的效应是负的, 过去的增长(或衰退)倾向将会造成将来的衰退(或增长)趋势。

实际应用中分形维的计算方法很多, 对于信号分析而言, 通常采用概率空间的方法, 即通过获取时间序列的 Hurst 指数  $H$  而得到其分形维  $D_f$ , 两者之间的关系为  $D_f = 1/H$ 。根据此定义, 累积的白噪声的分形维等于 2(白噪声是一种独立不相关的随机过程, 其 Hurst 指数等于 0.5), 它可以完全充满期望的空间, 一个有“记忆效应”(或称相关性)的时间序列, 它的分形维在 1 与 2 之间。

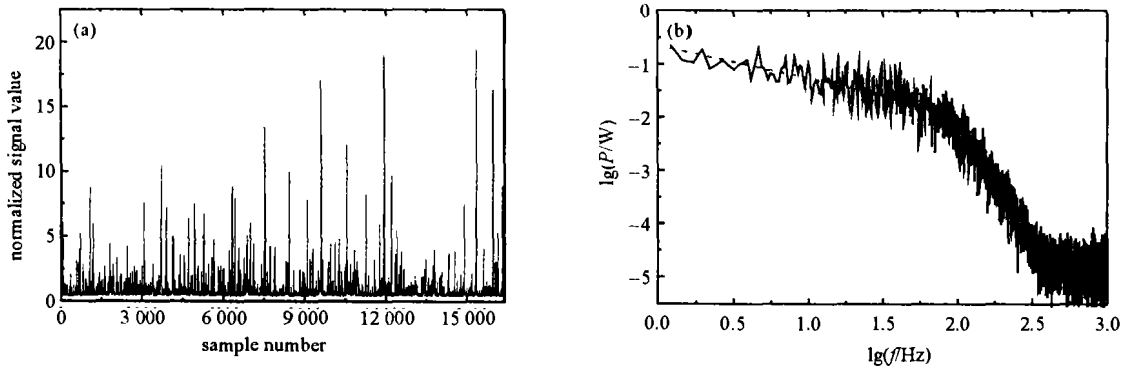


Fig. 1 Laser scintillation and its FFT power spectrum

图 1 激光大气闪烁及其 FFT 功率谱

图 1 反映的是激光在湍流大气中传输时的光强起伏及其功率谱, 其中激光传输距离  $L=6.8\text{km}$ , 表征闪烁强弱的物理量闪烁指数的值  $\beta = 0.227$ 。根据“分形具有标度不变性”这一基本特性, 并结合激光大气闪烁存在无标度区间的事实, 可知激光大气闪烁具有典型的分形结构特征<sup>[3]</sup>。图 1 反映的光强起伏的 Hurst 指数为 0.643。统计结果表明: 激光大气闪烁的 Hurst 指数一般都大于 0.5, 其最可几分布在 0.6~0.8 之间, 且随着起伏的增强呈下降趋势(如图 2 所示)。根据(6)式的物理意义, 可知这是一种长时期、正相关的非平稳随机过程。当激光大气闪烁由弱逐渐增强时其分形维逐渐增大(由图 2 中 Hurst 指数的变化趋势可以得到此结论), 在临界饱和和起伏条件下, 有限的实验结果表明分形维数随闪烁指数的增强继续保持增长趋势, 并没有出现饱和和现象(如图 3 所示), 数值模拟的结果则表明: 在非常强的起伏情况下, 激光大气闪烁的分形维也不会出现饱和和现象<sup>[4]</sup>。

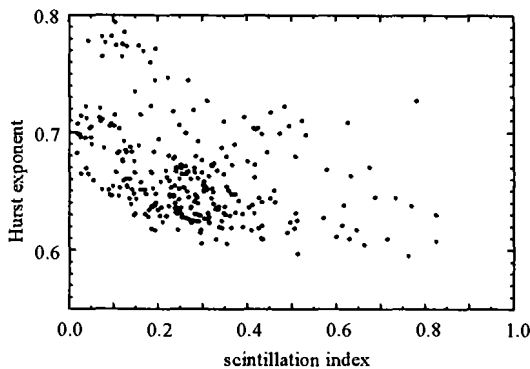


Fig. 2 Tend of the Hurst exponent

图 2 Hurst 指数的变化趋势

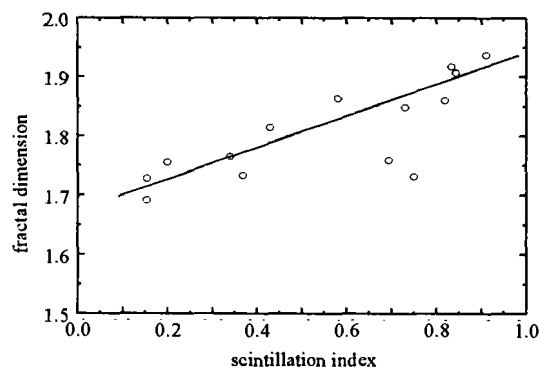


Fig. 3 Tend of the fractal dimension

图 3 分形维的变化趋势

2 光强起伏的多重分形分析

为了研究激光大气闪烁的“精细结构”, 我们对光强起伏的多重分形特征进行了分析, 得到了激光大气闪烁的奇异性及其多重分形谱, 详细的算法请参阅文献[7]。

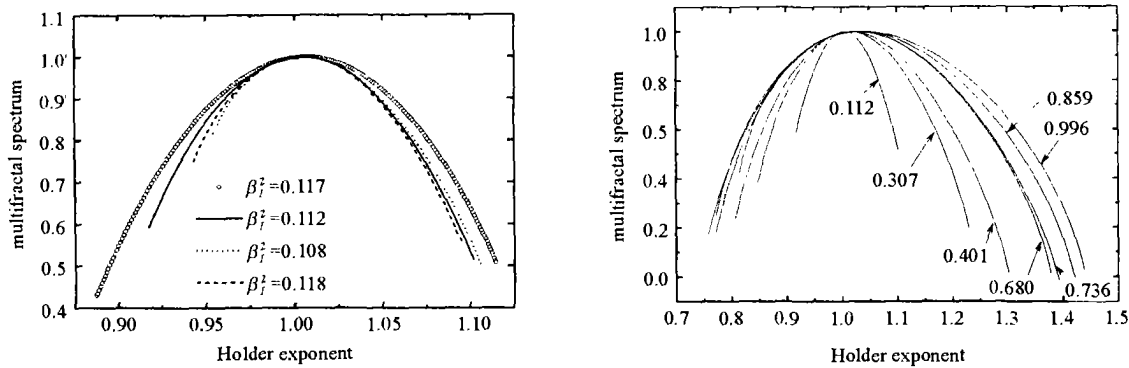


Fig. 4 Multifractal spectrum of the laser scintillation in the atmosphere

图 4 激光大气闪烁的多重分形谱

图 4 表示激光大气闪烁的多重分形谱,其中横坐标为 Holder 指数,也称奇异性指数,它反映了随机过程的奇异程度;纵坐标表示相对于奇异性的谱分布,图中标注的数字表示闪烁指数的大小。从图中可见,当闪烁指数取值近似相等时,其多重分形谱的差别较小,可以认为闪烁指数与多重分形谱之间存在对应关系;在弱起伏的条件下,当闪烁指数逐渐增大时,激光大气闪烁的多重分形谱的“谱宽”也相应的增大,即意味着闪烁的奇异性区间随湍流效应的增强而呈增大趋势。根据多重分形理论可知:如果随机过程(或随机函数)的变化是均匀的,则它的奇异性指数是一个常数,反之就存在着一个谱分布,表明该过程的变化是不均匀的,即存在一定的间歇性。由图 4 中激光大气闪烁存在着奇异性谱分布,我们能够得到这样的结论:实际大气中的激光光强起伏必然具有间歇性。近年来的实验研究已经证实了激光大气闪烁间歇性的存在,并且得到了实际湍流大气中的间歇性指数,其值约为  $0.1^{[8]}$ 。

根据 Tatarskii 理论,对闪烁起主要贡献的是大气湍流中尺度约为第一 Fresnel 区的湍涡,因此当 Fresnel 尺度不相等时,光强起伏应该呈现出不同的特征。我们计算了两种传输情况下的 Fresnel 尺度为(对于波长为  $\lambda=0.6328\mu\text{m}$  的 He-Ne 激光,光传输距离为 1.0km 和 6.8km,闪烁指数分别等于 0.1 和 0.22)

$$l_F = \sqrt{\lambda L} = \begin{cases} 2.516 \times 10^{-2} \text{ m} & (L = 1.0 \text{ km}) \\ 6.560 \times 10^{-2} \text{ m} & (L = 6.8 \text{ km}) \end{cases} \quad (7)$$

分形分析的结果如图 5 所示,显然此结果反映了 Fresnel 尺度对激光大气闪烁的影响。

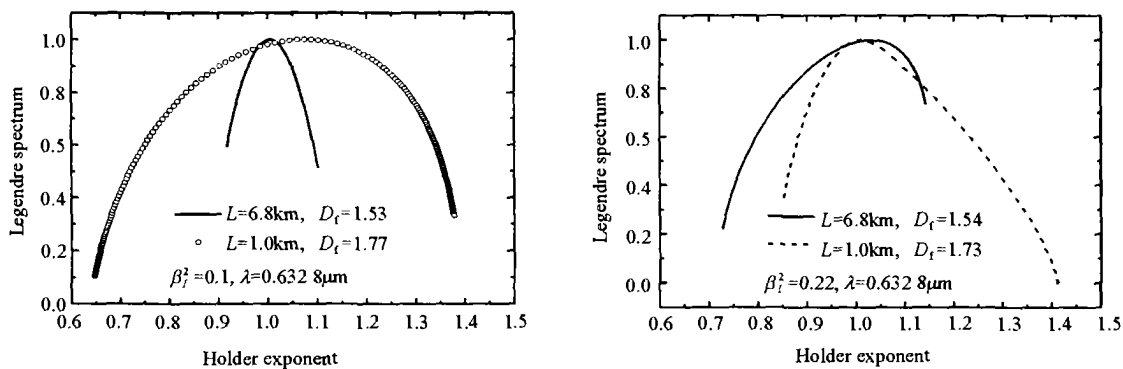


Fig. 5 Effect of the Fresnel zone to the laser scintillation with the same scintillation index

图 5 Fresnel 尺度对具有相等闪烁指数的激光大气闪烁的影响

### 3 结 论

通过对湍流大气中光强起伏的分形分析我们可以得出以下结论:实际湍流大气中光强起伏是一种长时期、正相关的非平稳随机过程,其分形维随闪烁指数的增加呈增长趋势,Hurst 指数则呈下降趋势;即意味着随大气湍流效应的增强,激光大气闪烁的强度和复杂性增大、相关性则减小。Fresnel 尺度对激光大气闪烁存在着影响,在弱起伏条件下,不同 Fresnel 尺度下具有相等闪烁指数的激光大气闪烁的分形维和奇异性不相等,这表明仅用闪烁指数这一个单独参量并不能够完全描述激光大气闪烁。

## 参考文献:

- [1] Tatarskii. Wave propagation in the turbulent atmosphere[M]. Beijing: Science Press, 1978.
- [2] Anthony Davis. Multifractal characterizations of intermittency in nonstationary geophysical signals and fields[A]. Current Topics in Nonstationary Analysis[C]. Singapore World-Scientific: 1996. 97—158.
- [3] Mandelbrot B B. Fractal geometry of the nature[M]. Shanghai, Far-east Press, 1998.
- [4] 饶瑞中. 湍流大气中的准直激光束:分形结构与相位不连续点[J]. 强激光与粒子束, 2002, 14(4): 501—504. (Rao R Z. The collimated laser beam in the turbulent atmosphere: fractal structure and phase branch. *High Power Laser and Particle Beams*, 2002, 14(4): 501—504)
- [5] Hurst H E. Methods of using long-term storage in reservoirs[A]. Proc of the Institution of Civil Engineers Part I[C]. 1955. 519—577.
- [6] Mandelbrot B B. Long-run linearity, locally Gaussian process, H-spectra and infinite variance[J]. *International Economic Review*, 1969, 10,82—111.
- [7] Falconer K J. Fractal geometry: mathematical foundation and application[M]. Shenyang: North-east University Press, 1990. 340—353
- [8] 饶瑞中, 王世鹏, 刘晓春, 等. 激光大气闪烁的间歇特征[J]. 强激光与粒子束, 1999, 11(2): 185—188. (Rao R Z, Wang S P, Liu X C, et al. Intermittency characteristics of laser irradiance scintillation in atmosphere. *High Power Laser and Particle Beams*, 1999, 11(2): 185—188)

## Fractal characteristics of laser scintillation in the atmosphere

ZHU Wen-yue, RAO Rui-zhong, MEI Hai-ping

(Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, the Chinese Academy of Sciences, P. O. Box 1125, Hefei 230031, China)

**Abstract:** Laser scintillation in the turbulent atmosphere was analyzed using the fractal methods, especially its fractal dimension and Hurst exponent. The results show that: the laser scintillation is a nonstationary random process with long-run and positive correlation. In the weak fluctuation conditions (the scintillation index in the range of 0 to 1.2), the fractal dimension would increase and the Hurst exponent would decrease with the increase of the scintillation index. That means the scintillation's intensity and complexity both increase and the temporal correlation decreases as the degree of fluctuation increases. In the strong fluctuation conditions, the limited data may reflect that the fractal dimension keeps on increasing, and no saturation appears. In addition, the effect of the Fresnel zone to the scintillation was also studied in the paper and some new results is obtained.

**Key words:** Fractal dimension; Hurst exponent; Laser scintillation