

文章编号: 1001-4322(2005)01-0001-04

## 热晕效应数值模拟中对计算参数的选取\*

黄印博, 王英俊

(中国科学院 安徽光学精密机械研究所 大气光学中心, 安徽 合肥 230031)

**摘 要:** 根据数值计算的抽样原则, 对激光大气传输数值模拟中如何准确地选取计算参数作了比较全面的分析, 导出计算参数选取所应遵循的判据。结合高斯光束及平台光束准直传输热畸变后的相位分布, 得到了网格间距与 Bradley-Hermann 热畸变参数的关系。在算出此热畸变参数后, 便可选定合适的网格间距, 由数值结果便能准确评价实际激光大气传输的效果。数值结果表明, 相同网格数、不同网格间距下数值结果的差别相对较大, 若网格间距选取不当, 将给数值结果带来较大误差。

**关键词:** 热晕效应; 数值模拟; 计算参数; 网格间距

**中图分类号:** TN012 **文献标识码:** A

数值模拟是对激光大气传输及其相位补偿进行理论研究的重要方面, 也是对一些激光工程应用中的大气传输问题进行定量评价的重要手段<sup>[1~4]</sup>。通常, 激光大气传输可由傍轴近似的标量波动方程进行描述, 即

$$2ik \frac{\partial}{\partial z} u(r, z) + \Delta u(r, z) + k^2 \left( \frac{n^2}{n_0^2} - 1 \right) u(r, z) = 0 \quad (1)$$

式中:  $u(r)$  为光波函数;  $k=2\pi/\lambda$  为波数,  $\lambda$  为波长;  $n(r, z)=n_0+n_t+n_b$  为大气折射率,  $n_0$  为未受扰动的大气折射率,  $n_t, n_b$  分别为大气湍流和大气吸收激光能量加热而引起的折射率扰动;  $\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$ ,  $z$  轴表示光束传输方向。在数值模拟中, 激光传输方程通常采用相屏法求解<sup>[1,3~5]</sup>, 即光束的传输路径是由真空和散布其间的若干薄相位屏所构成。激光每传输到一个相屏时即把对应的相位扰动叠加到光波波前上, 然后在真空中传输至下一个相屏处, 再叠加此相屏对应的相位扰动, 再在真空中传输, 如此迭进直至终点。至于介质对光波振幅的扰动则体现在已叠加相位扰动的光波在各相屏间的真空传输过程中所引起的振幅的改变上。

若要通过数值结果准确地评价实际激光大气传输的效果, 首先必须保证数值计算的精度。本文就针对激光大气传输数值模拟中如何准确地选取计算参数进行了比较全面的介绍, 并着重根据数值计算的抽样原则对计算参数的选取进行了分析, 推导出在选取计算参数时所应遵循的规律, 结合高斯光束及平台光束准直传输热畸变后的相位分布, 得到了网格间距与 Bradley-Hermann 热畸变参数  $N_D$  的关系。这样, 在了解了激光发射系统基本参数及大气参数的基础上, 通过数值计算可迅速了解热畸变参数  $N_D$  的大小, 并根据推导所得的关系选取合适的网格间距, 从而由数值结果对实际激光大气传输的效果作出准确评价。文中最后对选取不同计算参数时数值结果的差异进行了比较分析, 结果表明: 在相同网格间距、不同网格数下数值结果的差别不大, 但在相同网格数、不同网格间距下数值结果的差别相对较大, 而且若选取的网格间距不当, 将会给数值结果带来较大的误差。

## 1 理论分析

### 1.1 计算参数选取的要求<sup>[5,6]</sup>

计算参数的选取一般是指横向抽样网格间距  $\Delta x(\Delta y)$ 、抽样网格数  $N$  以及传输步长  $\Delta z$  等的选取, 以下将根据数值计算的抽样原则对计算参数的选取进行讨论。首先, 为正确地以离散的相位屏代替连续相位, 需要满足 Nyquist 抽样定理, 使得相屏上相邻网格点上的相位差满足

$$|\varphi(i, j) - \varphi(i-1, j)| < \pi, \quad |\varphi(i, j) - \varphi(i, j-1)| < \pi \quad (2)$$

一般情况下  $x, y$  方向上的网格间距相等, 即  $\Delta x = \Delta y$ , 因此文中将以  $\Delta x$  为例进行讨论。由(2)式可知, 网格间距  $\Delta x$  需要符合下述条件, 即

\* 收稿日期: 2004-04-02; 修订日期: 2004-08-16

基金项目: 国家 863 计划项目资助课题; 中国科学院合肥研究院物质计算科学中心资助课题

作者简介: 黄印博(1976—), 男, 博士研究生, 主要从事激光大气传输的物理及数值模拟研究; 合肥 1125 信箱, E-mail: ybhuang@aiofm.ac.cn。

$$\Delta x < \pi / |d\varphi/dx| \quad (3)$$

由于是用有限的离散傅里叶变换计算光束的传输,传输介质的高频起伏散射作用在传输过程中可能导致其中一侧网格上的能量分布出现在另一侧,并且随传输距离的增加,这种计算网格的边界效应会更为明显。因此,为了得到准确的传输方程的解,就必须控制这种混淆现象。若散射角  $\theta = (1/k)|d\varphi/dx|$ ,则当传输距离为  $z$  时,在相屏面上的相对偏离量为  $z\theta$ 。因此,要求传输路径上计算网格的宽度  $b$  应该满足  $b > (z/k)|d\varphi/dx| + D$ ,  $D$  为发射孔径。归结为对  $\Delta x$  的要求,即  $\Delta x > \lambda z \Delta\varphi_{\max}/2\pi(b-D) = \lambda z/2(b-D)$ ,结合(3)式可以得到网格间距  $\Delta x$  需要满足的条件为

$$\lambda z/2(b-D) < \Delta x < \pi / |d\varphi/dx| \quad (4)$$

考虑到文中所计算的是准直光束传输的热晕效应,一般取计算网格的宽度  $b = 3D$  即可有效地抑制边界效应,因此对网格间距  $\Delta x$  的选取要求为

$$\lambda z/4D < \Delta x < \pi / |d\varphi/dx| \quad (5)$$

另外由上面的分析还可以得到对传输步长  $\Delta z$  选取的要求,即  $\Delta z < 4D\Delta x/\lambda$ ,通常选取的  $\Delta x$  在  $10^{-3} \sim 10^{-2}$  m 范围内,发射孔径  $D$  在  $10^{-1} \sim 10^0$  m 范围内,传输波长为  $\mu\text{m}$  量级,因此  $4D\Delta x/\lambda$  的量级为  $10^2 \sim 10^4$  m,而在数值计算中一般选取的传输步长都能满足该判据。至于抽样网格点数的选取,首先根据所要模拟计算的光传输效应确定出网格间距  $\Delta x$  及计算网格的宽度  $b$ ,然后由  $b/\Delta x$  并结合计算条件确定出抽样网格数  $N$ 。

## 1.2 热晕效应模拟中 $\Delta x$ 的选取要求

根据数值计算的抽样原则所得到的判据(5)式,并结合高斯光束、平台光束准直传输热畸变后的相位分布  $\varphi(x, y)^{[2]}$ ,下面着重讨论数值模拟中对网格间距  $\Delta x$  选取的要求。

首先考察初始强度分布为高斯分布的传输光束,其热畸变后的相位分布为

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{BG}}(x, y, z) = & -(\Delta\varphi_G/2)\exp[-(y/a_e)^2][1 + \text{erf}(x/a_e)] \approx \\ & -(\Delta\varphi_G/2)[1 + (2/\sqrt{\pi})(x/a_e) - (y/a_e)^2 + \dots] \end{aligned} \quad (6)$$

式中:  $\Delta\varphi_G = (1/2\sqrt{\pi})N_D$  为高斯光束热畸变后的横向最大相移(峰值光强对应的相移),而  $N_D$  为 Bradley-Hermann 热畸变参数<sup>[2]</sup>,  $a_e$  为  $1/e$  功率点光斑半径( $D = 2\sqrt{2}a_e$ )。由(6)式可知,在  $y$  轴方向上其相位分布梯度较大,若相邻网格点间的相位差用  $\Delta\varphi_y$  表示,则

$$\Delta\varphi_y = (\partial\varphi_{\text{BG}}/\partial y)\Delta y = (\Delta\varphi_G/a_e^2)y\Delta y\exp(-y^2/a_e^2)[1 + \text{erf}(x/a_e)] \quad (7)$$

令  $\partial\Delta\varphi_y/\partial y = 0$ , 得到  $y = a_e/\sqrt{2}$ , 即此时两抽样网格点间的相位差最大,结合表达式(2)可得出

$$\Delta\varphi_{y,\max} = (\partial\varphi_{\text{BG}}/\partial y)\Delta y \approx \Delta\varphi_G\Delta y/\sqrt{2}a_e = N_D\Delta y/\sqrt{\pi}D < \pi \quad (8)$$

因此,对初始光强为高斯分布的传输光束而言,其网格间距  $\Delta x$  需要满足

$$\lambda z/4D < \Delta x_{\text{BG}} < \pi^{3/2}D/N_D \quad (9)$$

对平台光束(均强圆形光束)而言,其热畸变后的相位分布为

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{BU}}(x, y, z) = & -(\Delta\varphi_U/2)[(x/a) + (1 - y^2/a^2)^{1/2}] \approx \\ & -(\Delta\varphi_U/2)[1 + (x/a) - (y^2/2a^2) + \dots] \end{aligned} \quad (10)$$

式中:  $\Delta\varphi_U = (1/\sqrt{2}\pi)N_D$  为平台光束热畸变后的横向相移;  $a$  为平台光束半径( $D = 2a$ )。由(10)式可知,其相位分布梯度较大的方向也在  $y$  轴方向上,相邻网格点间的相位差同样用  $\Delta\varphi_y$  表示,则

$$\Delta\varphi_y = (\partial\varphi_{\text{BU}}/\partial y)\Delta y = (\Delta\varphi_U/2)[y\Delta y/a^2(1 - y^2/a^2)^{1/2}] \quad (11)$$

因为  $\partial\Delta\varphi_y/\partial y = 0$ , 所以  $y = a$  时,两抽样网格点间的相位差最大。但考虑到  $\Delta\varphi_y$  表达式中的分母项以及差分网格的选取为  $y|_a = (y|_{a+\Delta y/2} + y|_{a-\Delta y/2})/2$ , 而且当  $y = a + \Delta y/2$  时,忽略衍射效应则  $\varphi_{\text{BU}} = 0$ , 所以当  $y = a - \Delta y/2$  时,两抽样网格点间的相位差最大,结合表达式(2)可得出

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{y,\max} = & (\partial\varphi_{\text{BU}}/\partial y)\Delta y = (\Delta\varphi_U/2)\{(a - \Delta y/2)\Delta y/a^2[1 - (a - \Delta y/2)^2/a^2]^{1/2}\} = \\ & (\Delta\varphi_U/2)(\Delta y/a)^{1/2}(1 - \Delta y/2a)/(1 - \Delta y/4a)^{1/2} \approx (\Delta\varphi_U/2)(\Delta y/a)^{1/2} < \pi \end{aligned} \quad (12)$$

因此,对初始光强为均匀分布的圆形传输光束而言,其网格间距  $\Delta x$  需要满足

$$\lambda z/4D < \Delta x_{\text{BU}} < 4\pi^4 D/N_D^2 \quad (13)$$

## 2 数值分析

对准直光束传输热晕效应的数值模拟,由(9)式及(13)式可知,初始光强无论是高斯分布还是均匀分布,其

网格间距的选取均分别与传输光束的波长  $\lambda$ 、发射孔径  $D$ 、传输距离  $z$  以及 Bradley-Hermann 热畸变参数  $N_D$  有关。以下选择了一组发射系统基本参数：波长  $1 \mu\text{m}$ 、发射孔径  $0.6 \text{ m}$ 、准直传输  $1 \text{ km}$ ，并着重讨论网格间距  $\Delta x$  与热畸变参数  $N_D$  的关系。图 1 是在上述基本参数下所确定的网格间距与热畸变参数的关系。由图可知，平台光束比高斯光束对网格间距选取的要求严格一些。平台光束准直传输  $1 \text{ km}$ ，当  $N_D > 650$  时，将无法选取合适的网格间距以满足判据(13)式的要求；准直传输  $5 \text{ km}$ ，当  $N_D > 300$  时，就已经无法选取符合要求的网格间距。此

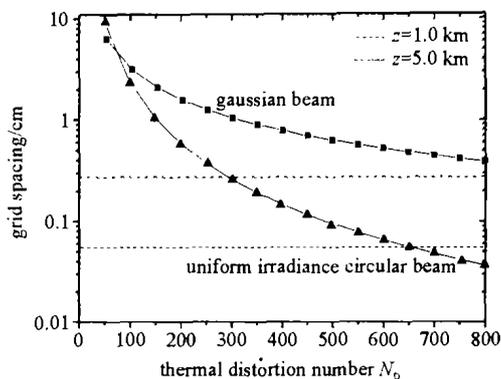


Fig. 1 Grid spacing vs thermal distortion number of beam propagation  
图 1 计算网格间距与光束准直传输的热畸变数  $N_D$  的关系

时，可以适当增加网格数并增大计算网格的缓冲区，比如令网格宽度  $b=4D$ ，这样判据(5)式的下限要求为原来的  $2/3$ ，因此就有可能选取符合要求的网格间距，但这也只能是在一定范围内缓和网格间距选取的要求。

当平台光束准直传输  $1 \text{ km}$ ，热畸变参数  $N_D$  为  $150$  时，以下分别选择网格间距为  $0.005, 0.009, 0.012 \text{ m}$ ，网格数  $N$  为  $256$  和  $512$ ，对不同计算参数下的数值结果进行比较。表 1 中， $S_1, S_2$  分别是轴值 Strehl 比 (StrehlA)、爱里斑范围内的环轴 Strehl 比 (StrehlE)， $\beta$  为衍射极限倍数 (定义为长曝光光斑  $83.9\%$  环围能量半径与理想情况爱里斑半径之比)<sup>[6-8]</sup>。由表中的数据对比可知，相同网格间距、不同网格数下数值结果的差别不大，而在相同网格数、不同网格间距下数值结果的差别相对较大。与小的网格间距相比，当网格间距取得较大时，计算网格的低频部分将有所增加，但高频部分却相对减少，甚至可能导致畸变相位的高频部分超出计算网格的高频范围，并将其叠加到网格的低频部分。由图 1(平台光束)可知，当网格间距为  $0.012 \text{ m}$  时，已超出了判据(13)式所允许的上限要求，此时畸变光斑有部分超出了计算网格的范围。由表中数据对比也可看出，StrehlA 的值要大于较小网格间距时的结果，这正是由于当选取的网格间距大于判据的上限要求时导致的频域混叠现象所造成的，但是其远场能量集中度仍然比较小网格间距时的结果差，因此按此数值结果是不能准确评价实际激光大气传输的效果的。

为有效模拟相位畸变中的高频部分，选取的网格间距必须小于判据(13)式所确定的上限要求。但是，对文中准直光束传输热晕效应的模拟，抽样网格间距也并非越小越好。因为网格间距越小，一方面要求较大的网格数以确保空间缓冲区 (即尽可能减小边界效应)；另一方面，网格间距越小，计算网格的低频部分也会相对减少，而且爱里斑范围内的数据点数就越少，这同样将影响到计算精度，会给数值结果带来误差。一般需要按照判据上、下限的要求，尽量选取适中的网格间距，不要选取较接近上、下限的值，比如  $0.009 \text{ m}$  的网格间距是比较接近上限要求的，其对应的数值结果与  $0.005 \text{ m}$  网格间距时的结果还是稍有差别的 (如表 1 所示)。

表 1 不同计算网格参数下数值结果的比较

Table 1 Comparison of the numerical results of different calculation parameters

$\Delta x/\text{m}$	$N$	$S_1$	$S_2$	$\beta$
0.005	256	0.169 1	0.203 3	5.12
	512	0.169 1	0.204 3	5.09
0.009	256	0.170 0	0.201 8	5.24
	512	0.170 0	0.202 8	5.22
0.012	256	0.172 3	0.202 4	5.37
	512	0.172 3	0.202 8	5.36

### 3 结 论

本文着重根据数值计算的抽样原则对计算参数的选取进行了分析，并且结合高斯光束及平台光束准直传输热畸变后的相位分布，得到了网格间距与 Bradley-Hermann 热畸变参数  $N_D$  的关系。按此关系选取合适的网格间距，从而可由数值模拟结果准确地评价实际激光大气传输的效果。文中对选取不同计算参数时的数值

结果也进行了比较分析,结果表明:在相同网格间距、不同网格数下数值结果的差别不大;在相同网格数、不同网格间距下数值结果的差别相对较大,而且若选取的网格间距不当,将会给数值结果带来较大的误差。文中所得的网格间距选取的判据(9)式及(13)式,在热晕效应相位补偿的数值计算中也有一定的参考价值<sup>[7,8]</sup>。但由于在热晕补偿的计算中,除考虑热畸变参数  $N_D$  的影响之外,还必须考虑等效热晕距离  $z_B$  的影响,因此在热晕效应相位补偿的数值模拟中计算参数的选取更为复杂。

数值模拟中,对计算参数的选取除了需要考虑抽样原则之外,实际上还需要根据发射光源特性、随机介质特性、光传输效应等各方面对其选取进行全面的分析。比如,传输光束经过每个相屏时,所引起的相位变化应足够小,从而对场的振幅没有明显的影响而只是影响相位,即  $k\sigma_n\Delta z \ll 1$  ( $\sigma_n^2$  为传输介质折射率起伏的方差),所以要求传输步长  $\Delta z \ll \lambda/\sigma_n$ 。另外,对聚焦光束传输热晕效应的数值模拟,其对传输步长的选取更为严格。越接近焦平面,光强越强,热晕效应相应更严重,尤其是对大菲涅尔数的聚焦光束,当计算焦平面附近的传输时需要选取更小的传输步长。在湍流热晕相互作用的数值模拟中,无论是模拟准直光束传输还是聚焦光束传输,计算参数的选取都将是更为复杂的,对网格间距以及传输步长的选取更要进行全面的分析,从计算精度以及所能承受的计算条件等方面考虑做出合理的选择。

### 参考文献:

- [1] Martin J M, Flatte S M. Intensity images and statistics from numerical simulation of wave propagation in 3-D random media[J]. *Appl Opt*, 1988, **27**(11):2111—2126.
- [2] Gebhardt F G. Twenty-five years of thermal blooming: an overview[A]. Proc of SPIE[C]. 1990, **1221**:2—25.
- [3] 王英俭,吴毅. 折迭式 FFT 算法对激光大气传输湍流效应的数值模拟[J]. 强激光与粒子束,1992,4(4):581—587. (Wang Y J, Wu Y. Folding FFT modification for laser propagation in the turbulent atmosphere. *High Power Laser and Particle Beams*, 1992,4(4):581—587)
- [4] 王英俭,吴毅. 扩展物体漫反射光传输及成像的数值模拟研究[J]. 光学学报,1998,18(8):1470—1472. (Wang Y J, Wu Y. Numerical simulation of propagation of diffuse reflection light of extended object. *Acta Optica Sinica*, 1998,18(8):1470—1472)
- [5] Knepp D L. Multiple phase-screen calculation of the temporal behavior of stochastic waves[A]. Proc of IEEE[C]. 1983, **71**(6):722—737.
- [6] 王英俭. 激光大气传输及其相位补偿的若干问题探讨[D]. 合肥:中国科学院安徽光学精密机械研究所,1996. (Wang Y J. Some study on the laser propagation in the atmosphere and its phase compensation. Hefei: Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, 1996)
- [7] 黄印博,王英俭,饶瑞中,等. 热晕效应相位补偿定标参量的数值分析[J]. 光学学报,2002,22(12):1461—1464. (Huang Y B, Wang Y J, Rao R Z, et al. Numerical calculation of the scaling parameter for adaptive optics compensation for thermal blooming effects. *Acta Optica Sinica*, 2002,22(12):1461—1464)
- [8] Huang Y B, Wang Y J, Gong Z B. Numerical analysis of the scaling parameters of adaptive compensation for thermal blooming effects[A]. Proc of SPIE[C]. 2002, **4926**:146—149.

## Choosing computing parameters in the numerical simulation of thermal blooming effects

HUANG Yin-bo, WANG Ying-jian

(Center for Atmospheric Optics, Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics,  
Chinese Academy of Sciences, P. O. Box 1125, Hefei 230031, China)

**Abstract:** In the numerical simulation of thermal blooming effects, how to choose the grid spacing and other computing parameters correctly is introduced. Based on the sample principles of numerical calculation, the choice of computing parameters is analyzed. Combining the blooming distortion phase distribution for a Gaussian beam and a uniform irradiance circular beam, the relation between the grid spacing and Bradley-Hermann distortion number is deduce. The correct grid spacing could be chosen from the value of the thermal distortion number. In addition, we can correctly evaluate the effects of laser propagation in the real atmosphere from the numerical results. The results show that the difference of the numerical results with same grid numbers and different grid spacing is relatively big. Moreover, the error of numerical results is big, if the choice of grid spacing is unsuitable.

**Key words:** Thermal blooming effect; Numerical simulation; Computing parameters; Grid spacing