

文章编号: 1001-4322(2003)05-0435-04

相位不连续点对自适应光学的影响*

范承玉, 王英俊, 龚知本

(中国科学院安徽光学精密机械研究所, 安徽合肥 230031)

摘要: 分析了激光在湍流大气中传输时,若光束波前中出现相位不连续点,自适应光学校正能力降低的原因,通过数值模拟计算了当光束波前中出现相位不连续点时对自适应光学校正的影响,表明在传输过程中出现不连续点的情况下,为了提高自适应光学的校正能力,必须要考虑不连续相位的影响。

关键词: 相位不连续点; 自适应光学; 大气传输

中图分类号: TP212.1

文献标识码: A

激光在大气中进行长距离传输时,即使湍流很弱也可以导致很强的光强起伏(强闪烁),强的闪烁将导致自适应光学对大气湍流校正能力的降低。C. A. Primmerman 等^[1]已完成了 5.5km 水平路径激光大气传输实验,实验表明随着闪烁的增强,自适应光学对大气湍流的校正能力明显地降低了,并指出自适应光学校正能力降低的主要原因是随着闪烁的增强光波波前中出现相位不连续点的缘故。相位不连续点产生的主要原因是:光波在湍流大气中传输时,由于湍流介质的作用产生衍射波,这些衍射波在向前传输过程中,产生相干或相消干涉,在完全相消干涉的情况下,就会出现相位不连续点。在我们的 3km 准水平激光大气传输实验中也观察到光波波前中存在相位不连续点^[2],Fried^[3,4]等在激光大气传输数值模拟中也观察到光波相位不连续点的存在,并且指出,当激光在大气中传输时,若光束波前中出现相位不连续点时,光束波前相位应包括两部分:连续相位部分和不连续相位部分,而用最小方差相位重建算法重建相位的常规自适应光学不能完全应用波前探测器提供的信息,对光束波前中的不连续相位无能为力。因此当光束波前中出现相位不连续点时,自适应光学只能对大气湍流导致的相位畸变进行部分校正,从而导致自适应光学校正能力的下降。本文简要分析了最小方差法波前重建代数不能重建不连续相位的原因,通过数值模拟计算了当光束波前中出现相位不连续点时对自适应光学校正的影响。

1 理论分析

自适应光学的波前重建代数是通过对哈特曼波前探测器测量光斑在哈特曼子孔径上的偏离量(即光束波前斜率)来重建光束相位的。若用一标量复函数 $u(r)$ 表示畸变光场,则其在哈特曼子孔径中心位置 r 上的偏离量 Δr 可表示为^[5]

$$\Delta r \propto \text{Im} \left(\frac{\nabla u(r)}{u(r)} \right) \quad (1)$$

若畸变光场中某一局地光强不为零,则其光场可写成 $u(r) = |u(r)| e^{i\varphi(r)}$,代入(1)式,从而可发现哈特曼子孔径上的光斑偏离量就是光束波前的相位梯度

$$\Delta r \propto \text{Im} \left(\frac{\nabla u(r)}{u(r)} \right) = \text{Im} \left[\frac{(\nabla |u| e^{i\varphi} + i |u| (\nabla \varphi) e^{i\varphi})(r)}{(|u| e^{i\varphi})(r)} \right] = \nabla \varphi(r) \quad (2)$$

这里应该注意的是在畸变波前中如果出现相位不连续点,在不连续点附近总是存在平滑的相位函数使得 $\varphi(r)$ 可微。这里 $\varphi(r)$ 为畸变光场的局地相位,与到达哈特曼波前探测器上的整体相位 $\phi(r)$ 是有所区别的,不过当波前中不存在不连续点时整体相位 $\phi(r)$ 与局地相位 $\varphi(r)$ 是相同的。

从式(2)可以看出哈特曼波前探测器上的光斑偏离量就是局地光波相位梯度,为方便起见定义, $g(r) = \nabla \varphi(r)$,对于一孤点 r_{BP} ,如果其光强为零,即 $|u(r_{BP})| = 0$,则围绕着这点的 $g(r)$ 的分量之和(相位梯度的旋度)等于 $+2\pi$ 或 -2π ,这时可以说相位函数在位置 r_{BP} 有一不连续点。由于 $g(r)$ 的分量之和不等于零,因此

* 收稿日期:2002-10-14; 修订日期:2003-02-17

基金项目:国家 863 计划项目资助课题

作者简介:范承玉(1965-),男,副研究员,主要从事激光大气传输强湍流效应及其校正研究;合肥 1125 信箱;E-mail:cyfan@mail.aiofm.ac.cn.

$g(\mathbf{r})$ 不可能是某一连续相位函数的梯度,至少在不连续点位置附近的相位函数是不连续的。把 $g(\mathbf{r})$ 的分量之和写成连续形式可表示为

$$\oint_C ds \cdot g(\mathbf{r}) = \begin{cases} \pm 2\pi, & \text{if the contour encloses a branch point} \\ 0, & \text{if otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

这里 s 是沿着积分路径并与积分路径 C 平行的单位矢量积分变量。利用格林理论可把(3)式变成

$$\int_C d\mathbf{r} \cdot \nabla \times g(\mathbf{r}) = \begin{cases} \pm 2\pi, & \text{if the contour encloses a branch point} \\ 0, & \text{if otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

这里 $d\mathbf{r}$ 为面积积分变量,其积分区域在闭环路径 C 所围的区域内。在上式中若闭环路径取得尽可能的小,可得

$$\nabla \times g(\mathbf{r}) = \pm 2\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{BP})\mathbf{I}_z \quad (5)$$

这里 \mathbf{I}_z 为单位矢量,其方向与积分区域的法向平行。我们知道一个标量函数梯度的旋度为零,因而根据式(5)可知, $g(\mathbf{r})$ 不可能仅是某一标量函数的梯度,由电磁场理论知识可知,它应该是由一标量位势的梯度和一矢量位势的旋度组成,即

$$g(\mathbf{r}) = \nabla\varphi(\mathbf{r}) + \nabla \times \xi(\mathbf{r}) \quad (6)$$

这里用 $\varphi(\mathbf{r})$ 表示标量位势, $\xi(\mathbf{r})$ 表示矢量位势。下面将表明 $\varphi(\mathbf{r})$ 就是常规自适应光学重建的相位部分,并不是畸变光场的整体相位。

为了证明自适应光学相位重建代数并没有考虑实测的斜率数据中的矢量位势部分,考虑最小方矩阵重建代数,相位 $\varphi(\mathbf{r})$ 与 $g(\mathbf{r})$ 的关系为 $\varphi(\mathbf{r}) = A^+ g(\mathbf{r})$,其中 $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$ 。把矢量分析中的连续算子和矩阵算子一一对应进行分析: $\nabla \Rightarrow A$ 相当于梯度算子, $\nabla \cdot \Rightarrow A^T$ 相当于散度算子, $\nabla^2 \Rightarrow A^T A$ 相当于拉普拉斯算子。

注意到在 A^+ 中由散度算子 A^T 首先作用在 $g(\mathbf{r})$ 上,由于旋度的散度为零,以至于 $g(\mathbf{r})$ 中的非零旋度分量在重建过程中被过滤掉了,也就是说,这个重建代数抑制了实测斜率数据中与矢量位势 $\xi(\mathbf{r})$ 有关的任何部分,即与不连续点有关的部分,因此常规自适应光学重建代数“看不见”畸变光场中的不连续相位部分。

下面讨论在没有考虑不连续点的影响情况下,究竟损失了什么。由于 $g(\mathbf{r})$ 是一两维分量的矢量,仅与坐标 x 和 y 有关,与坐标 z 无关,那么矢量位势仅有 z 分量,并且这个分量仅是变量 x 和 y 的函数,与变量 z 无关。即矢量位势可写成

$$\xi(\mathbf{r}) = \xi(r)\mathbf{I}_z \quad (7)$$

把表达式(6)代入式(5),并考虑到 $\varphi(\mathbf{r})$ 梯度的旋度为零,可得

$$\nabla \times \nabla \times \xi(\mathbf{r}) = 2\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{BP})\mathbf{I}_z \quad (8)$$

当把表达式(8)代入式(7),并展开旋度的旋度,同时考虑到 $\xi(\mathbf{r})$ 与 z 无关,可得

$$\nabla^2 \xi(\mathbf{r}) = \mp 2\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{BP}) \quad (9)$$

上式的解为

$$\xi(\mathbf{r}) = \mp \log(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{BP}|) \quad (10)$$

现在我们考虑实测的斜率数据 $g(\mathbf{r})$ 中被常规自适应光学重建代数忽略的部分。如果用 $g_{BP}(\mathbf{r})$ 表示 $g(\mathbf{r})$ 中被忽略的部分,并且这部分等于矢量位势 $\xi(\mathbf{r})$ 的旋度,则有

$$\begin{aligned} g_{BP}(\mathbf{r}) = \nabla \times \xi(\mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial y} \xi(r)\mathbf{I}_x - \frac{\partial}{\partial x} \xi(r)\mathbf{I}_y = \mp \frac{\partial}{\partial y} \log(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{BP}|)\mathbf{I}_x \pm \frac{\partial}{\partial x} \log(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{BP}|)\mathbf{I}_y = \\ &\mp \left[\frac{y - y_{BP}}{(x - x_{BP})^2 + (y - y_{BP})^2} \right] \mathbf{I}_x \pm \left[\frac{x - x_{BP}}{(x - x_{BP})^2 + (y - y_{BP})^2} \right] \mathbf{I}_y \end{aligned} \quad (11)$$

如果有几个不连续点,那么 $g_{BP}(\mathbf{r})$ 将是形如上式的几个结果之和。

接下来考虑实测斜率数据中被忽略部分的相位 $\varphi_{BP}(\mathbf{r})$ 。为了简化计算,假设不连续点 $\mathbf{r}_{BP} = 0$,即在坐标原点。对于它的相位可以这样来计算:首先在某一点假设其相位为一任意值,然后连续地加上合适的 y 分量相位差,可以得到 y 轴上的结果,最后对 y 轴上的所有位置连续地加上合适的 x 分量相位差,则可以得到所有位置上的相位。如果开始的参考点位置为 $(x, y) = (\epsilon, 0)$,并考虑 ϵ 趋于零的情况,这样 $\varphi_{BP}(\mathbf{r})$ 可以写成

$$\varphi_{BP}(\mathbf{r}) = \varphi_y(\mathbf{r}) + \varphi_x(\mathbf{r}) \quad (12)$$

这里

$$\varphi_y(r) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^y dy' [\pm \epsilon / (\epsilon^2 + y'^2)] \tag{13a}$$

$$\varphi_x(r) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^x dx' [\mp y / (x'^2 + y^2)] \tag{13b}$$

对上式进行积分,并考虑极限以后,可得

$$\varphi_y(r) = \pm \frac{\pi}{2} (|y|/y) \tag{14}$$

$$\varphi_x(r) = \mp \arctan(x/y) \tag{15}$$

把表达式(14)和(15)代入(12)得

$$\varphi_{BP}(r) = \pm \left[\frac{1}{2} \pi (|y|/y) - \arctan(x/y) \right] \tag{16}$$

当然,不连续点不必非在原点,式(16)可写成更一般的形式

$$\varphi_{BP}(r) = \pm \left[\frac{1}{2} \pi \left(\frac{|y - y_{BP}|}{y - y_{BP}} \right) - \arctan \left(\frac{x - x_{BP}}{y - y_{BP}} \right) \right] \tag{17}$$

式(17)中的正负号表示连续点的旋度值为 $+2\pi$ 和 -2π 时的不连续相位。当波前中有多个相位不连续点时,不连续相位就是(17)式之和,然后取其主值。

2 不连续相位的影响

众所周知,光波在大气中传输时,如果大气湍流导致的光强起伏较弱(弱起伏),这时利用自适应光学对大气湍流进行补偿则具有很好的效果,但是随着传输距离的增长和强起伏效应的产生,这时再利用自适应光学对大气湍流进行补偿,效果并不理想。主要原因是由于光强起伏的增强,光束波前中出现了相位不连续点,由上节分析可知,常规自适应光学对不连续相位部分无能为力,因而造成自适应光学的校正效果降低。通过大量的计算表明,相位不连续点一般是成对出现的,这源于拓扑空间电荷守恒和畸变光场及其导数处处连续的结果^[6],并且点数和位置不是固定不变的,它有一产生、发展和湮灭过程。图 1 给出了模拟计算 0.6328 μm 激光传输 3km,大气相干长度为 4.2cm 情况下,两次传输过程相位不连续点的位置分布,图中的方格模拟 61 单元自适应光学系统哈特曼子孔径的位置,“+”代表正的不连续点的位置,“-”代表负的不连续点的位置。

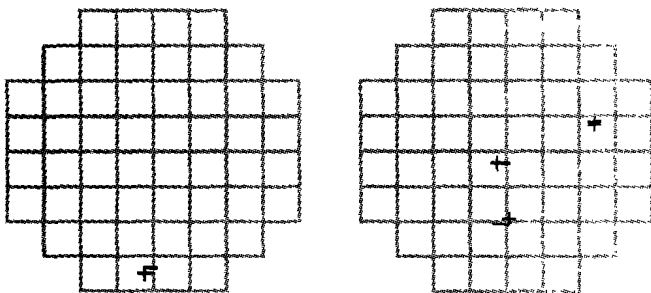


Fig. 1 Branch points located in Hartmann sensor
图 1 相位不连续点的位置

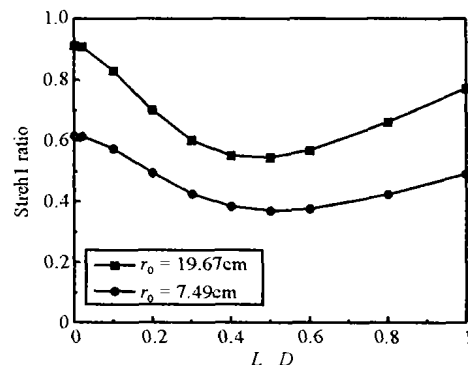


Fig. 2 Effect of branch points on adaptive optics
图 2 不连续相位对自适应光学的影响

下面以一对相位不连续点为例,定量分析不连续相位对自适应光学校正的影响。模拟计算信标光传输波前中没有相位不连续点,人为地在信标光波前上加上一对相位不连续点,并调整不连续点的间距,计算其连续相位校正后传输 3km 的 Strehl 比。如图 2 所示为相位校正效果(Strehl 比)随一对不连续点间距的变化情况。图中 D 为发射望远镜的孔径, L 为不连续点对的间距,大气相干长度分别为 19.67cm 和 7.49cm。从图中可以看出,当相位不连续点对的间距较小时,对激光传输的影响较小,但随着不连续点对间距的增大,其影响也越来越大,Strehl 比显著下降,当间距增大到孔径的一半时影响最大(近 40%);随着间距的进一步增大,其影响又变得越来越大。其原因是在望远镜孔径上的不连续相位的方差与相位不连续点的间距有关,在间距为望远镜孔径的一半时所引起的方差最大,因此这使得 Strehl 比下降最明显。

3 结 论

本文指出了激光在湍流大气中传输时,由于湍流介质作用产生的衍射波在完全相消干涉情况下光束波前

中会出现相位不连续点,分析了常规自适应光学对光束波前中的不连续相位部分无能为力原因。通过计算表明:当光波在大气中传输时,如果在大气湍流导致的畸变光场中出现相位不连续点,其对自适应光学系统校正的影响是比较大的。因此,为了提高自适应光学系统在有相位不连续点出现情况下的校正能力,必须要考虑不连续相位的影响。

参考文献:

- [1] Primmerman C A, Price T R, Humphreys R A, et al. Atmospheric-compensation experiments in strong-scintillation conditions[J]. *Appl Opt*, 1995, **34**(12),2081—2088.
- [2] 范承玉,王英俭,龚知本. 光波相位不连续点的探测[J]. 光学学报, 2001, **21**(11):1388—1391. (Fan C Y, Wang Y J, Gong Z B. Detection of branch-point in light phase[J]. *Acta Optica Sinica*, 2001, **21**(11):1388—1391)
- [3] Fried D L, Vaughn J L. Branch cuts in the phase function[J]. *Appl Opt*, 1992, **31**(15):2865—2882.
- [4] Fried D L. Branch point problem in adaptive optics[J]. *J Opt Soc Am A*, 1998, **15**(10):2759—2768.
- [5] Bigot E O Le, Wild W J, Kibblewhite E J. Branch point reconstructors for discontinuous light phase functions[A]. SPIE[C]. 1998, **3381**: 76—87.
- [6] Shvartsman N, Freund I. Vortices in random wave fields; nearest neighbor anticorrelations[J]. *Phys Rev Lett*, 1994, **72**(7):1008—1011.

Effect of branch points on adaptive optics

FAN Cheng-yu, WANG Ying-jian, GONG Zhi-ben

(Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, the Chinese Academy of Sciences, P. O. Box 1125, Hefei 230031, China)

Abstract: The reason for the degradation of adaptive optics system for atmospheric turbulence compensation when branch points are present in phase is analyzed in this paper. The influence of branch points in phase on adaptive optics system is numerically calculated. The result shows that the ability of adaptive optics system can be improved by taking into account the phase discontinuities when branch points are present in light propagation.

Key words: Branch points; Adaptive optics; Atmospheric propagation