

文章编号: 1007-5461(2008)01-0025-04

小波变换中基于正交多项式拟合的边界延拓

孔超, 方勇华, 兰天鹤, 熊伟, 董大明, 李大成

(中国科学院安徽光学精密机械研究所, 安徽 合肥 230031)

摘要: 为消除小波分解过程中的边界效应, 给出了一种基于多项式拟合的边界延拓的新方式。该延拓方式首先对信号边界处的 N 个点进行 M 阶正交多项式拟合, 将信号在边界处的低频变化规律用正交多项式表示出来, 再利用得到的边界处的低频变化规律对信号进行延拓, 从而减少了边界处引入的突变量。研究表明, N 取 30~50、 M 取 2~4 较为合适。进一步的实验表明, 利用小波变换在该延拓方式下对信号进行基线校正时, 边界效应得到了明显的改善。

关键词: 图像处理; 小波变换; 边界效应; 正交多项式拟合; 基线校正

中图分类号: TP911.7 **文献标识码:** A

A boundary prolongation method based on orthogonal polynomial fitting in wavelet transform

KONG Chao, FANG Yong-hua, LAN Tian-ge,
XIONG Wei, DONG Da-ming, LI Da-cheng

(Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Hefei 230031, China)

Abstract: A new boundary prolongation method based on orthogonal polynomial fitting was developed to remove the signal-end effect. In the prolongation method M -order orthogonal polynomial was fitted with N points for both ends firstly, the low-frequency function of signal's both ends was expressed by orthogonal polynomial, and then the signal was extended with function, so the imported high-frequency parts were lowered. Results showed that choosing N from 30~50 and M from 2~4 was proper. Further experiment showed that the signal-end effect was cut down clearly when the method mentioned above was used in baseline correction with wavelet transformation.

Key words: image processing; wavelet transform; signal-end effect; orthogonal polynomial fitting; baseline correction

1 引言

离散小波变换是通过 Mallat 塔式算法来实现的^[1], 根据 Mallat 算法, 小波分解的过程就是将信号与低通滤波器相卷积再进行基 2 抽取得到近似部分, 将信号与高通滤波器相卷积再进行基 2 抽取得到细节部分, 然后再对近似部分进行逐级分解。但在小波变换用于信号和图像处理时, 采样信号是有限长的, 而对有限长信号进行卷积运算必然涉及边界延拓的问题^[3,5]。通常采用的边界延拓主要有补零延拓、周期延拓、对称延拓、0 阶平滑延拓和 1 阶平滑延拓等, 但它们都会对每级小波分解的近似部分和小波重构的近似部分引入边界效应, 本文将提出一种基于正交多项式拟合的边界延拓方式, 来改善小波重构信号的边界效应。

作者简介: 孔超 (1983 -), 男, 硕士研究生, 现从事红外光谱信号分析的研究。 **E-mail:** kongchao1983@163.com

导师简介: 方勇华 (1966 -), 男, 博士生导师, 现主要从事光电信息处理的研究。 **E-mail:** yhfang@aiofm.ac.cn

收稿日期: 2007-01-31; **修改日期:** 2007-03-23

2 常用的边界延拓模式

一维离散信号与小波滤波器相卷积时,若信号 $x(n), n = 0, 1, 2, \dots, L-1$, 小波滤波器的长度为 Lf , 则原信号应在左右边界处分别延拓 $(Lf-1)$ 个点, 常用几种延拓方式及其表达式如下:

1) 零值延拓: 信号左右边界延拓 $Lf-1$ 个零。原信号 $x(n)$ 延拓为

$$0, 0, \dots, 0, x(0), x(1), \dots, x(L-1), 0, \dots, 0, 0.$$

2) 对称延拓: 信号左右边界延拓值分别与左右端点处的值对称。原信号 $x(n)$ 延拓为

$$x(Lf-2), \dots, x(0), x(0), x(1), \dots, x(L-1), x(L-1), \dots, x(L-Lf+1).$$

3) 周期延拓: 信号左右边界延拓值分别与信号右端点和左端点的值对应。原信号 $x(n)$ 延拓为

$$x(L-Lf+1), \dots, x(L-1), x(0), x(1), \dots, x(L-1), x(0), \dots, x(Lf-2).$$

4) 恒值延拓: 信号左右边界延拓值恒为端点处的值。原信号 $x(n)$ 延拓为

$$x(0), \dots, x(0), x(0), x(1), \dots, x(L-1), x(L-1), \dots, x(L-1),$$

5) 一阶延拓: 信号左右边界延拓值分别在最端点处两个点所确定的直线上。原信号 $x(n)$ 延拓为

$$x(-Lf+1), \dots, x(-1), x(0), x(1), \dots, x(L-1), x(L), \dots, x(L-Lf+2).$$

其中 $x(-1) = 2x(0) - x(1), x(L) = 2x(L-1) - x(L-2), x(-2) = 2x(-1) - x(0), x(M+1) = 2x(M) - x(M-1)$ 。左边界延拓值的递推表达式为 $x(a-1) = 2x(a) - x(a+1)$; 右边界延拓值的递推表达式为 $x(a+2) = 2x(a+1) - x(a)$ 。

不同的延拓方式对小波分解的结果会产生不同的影响, 图 2 为一实测信号 $f(n)$ (如图 1 所示) 在不同延拓方式下进行一次小波分解后得到的近似部分。由图 2 可以看出, 上述五种延拓方式对应的小波系数, 尤其是补零延拓、周期延拓和一阶延拓, 在边界处产生了强烈的边界效应。这是由于零值延拓、对称延拓、周期延拓均未考虑原始信号的具体情况而直接进行了延拓, 而恒值延拓和一阶延拓虽然仅仅考虑了原信号在边界处的值, 但仅仅涉及到边界处一两个点的值。随着小波分解的继续进行, 近似部分的边界效应会表现得越来越明显。由于不论采用何种延拓方式, 若不对小波系数作任何处理, 即使小波分解过程中产生了边界效应, 原始信号都可完全重构, 而当对小波系数作处理, 恰好改变了产生边界效应处的小波系数, 就会导致小波重构信号的边界效应。图 3 为在对称延拓模式下利用小波变换来对图 1 中的信号进行基线校正得到的结果, 小波重构信号产生了边界效应。

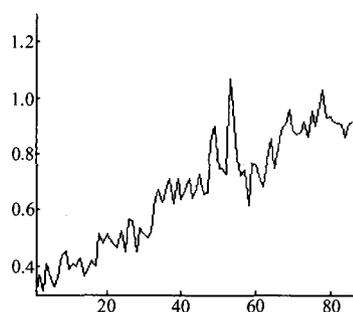


Fig.1 The original signal $f(n)$

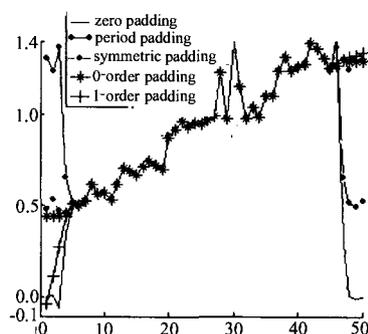


Fig.2 The approximation part of the original signal's first decomposition with several extend methods

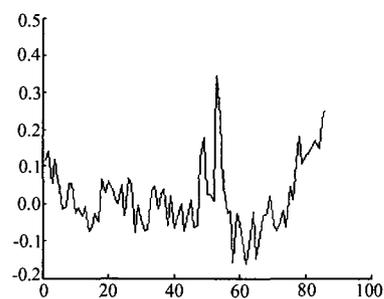


Fig.3 The baseline correction result of the signal in Fig.1 symmetric extension

3 基于正交多项式拟合的边界延拓

为了克服小波重构信号的边界效应，本文提出了基于正交多项式拟合的延拓方式。该延拓方式的基本方法是：首先对边界处的 N 个点进行 M 阶正交多项式拟合，将信号在边界处的低频变化规律用正交多项式表示出来，再利用得到的边界处的低频变化规律对信号进行延拓。

在实际应用中，拟合阶数 M 不宜过高，拟合的点数 N 也不宜过多。当拟合阶数 M 过高时，拟合的多项式中的高频分量增加，一般取 2~4 较为合适；当拟合点数 N 过多时，由于拟合能力的限制，拟合出的多项式反映的变化规律将不以边界的点为主，而主要受中间点变化规律的控制，一般取 30~50 为宜。本文取 $M = 2, N = 30$ 。

在小波分解过程中，基于正交多项式拟合的左右边界延拓方式的算法如下：

1) 对左右边界处的 N 个点的二阶多项式拟合的过程

(a) 取左边界的 N 个点为： $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{N-1}, y_{N-1}), (x_N, y_N)$ ；

取右边界的 N 个点为： $(x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2), \dots, (x'_{N-1}, y'_{N-1}), (x'_N, y'_N)$

拟合后的二阶多项式的形式为： $y(x) = c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + c_2T_2(x)$ 。

(b) 左边界拟合的三个正交多项式分别为

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, T_2(x) = x^2 - \left[\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 T_1(x_i)}{\sum_{i=1}^N T_1^2(x_i)} \right] T_1(x) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2. \quad (1)$$

可见，正交多项式仅仅取决于横坐标。由于对于边界延拓而言，多项式拟合的目的在于信号变化趋势的提取，而变化趋势沿横坐标满足平移不变性，因而可以通过平移使左右边界 N 个点的横坐标相同（均与左边界的 N 个点的横坐标相同），则右边界的 N 个点为 $(x_1, y'_1), (x_2, y'_2), \dots, (x_N, y'_N)$ ；则左右边界使用相同的正交多项式。左边界拟合后的三个参数为

$$c_0 = \frac{\sum_{i=1}^N T_0(x_i)y_i}{\sum_{i=1}^N T_0^2(x_i)}, c_1 = \frac{\sum_{i=1}^N T_1(x_i)y_i}{\sum_{i=1}^N T_1^2(x_i)}, c_2 = \frac{\sum_{i=1}^N T_2(x_i)y_i}{\sum_{i=1}^N T_2^2(x_i)}, \quad (2)$$

右边界拟合后的三个参数为

$$c'_0 = \frac{\sum_{i=1}^N T_0(x_i)y'_i}{\sum_{i=1}^N T_0^2(x_i)}, c'_1 = \frac{\sum_{i=1}^N T_1(x_i)y'_i}{\sum_{i=1}^N T_1^2(x_i)}, c'_2 = \frac{\sum_{i=1}^N T_2(x_i)y'_i}{\sum_{i=1}^N T_2^2(x_i)}, \quad (3)$$

则左边界 N 个点的变化规律为

$$y(x) = c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + c_2T_2(x). \quad (4)$$

右边界 N 个点的变化规律为

$$y'(x) = c'_0T_0(x) + c'_1T_1(x) + c'_2T_2(x). \quad (5)$$

2) 左右边界的延拓

按照第 (1) 步拟合出的规律，对左边界规律向左延拓，对右边界的规律向右延拓。

左边界延拓向左的第 i 个点的值为

$$c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + c_2T_2(x).$$

右边界延拓向右的第 i 个点的值为

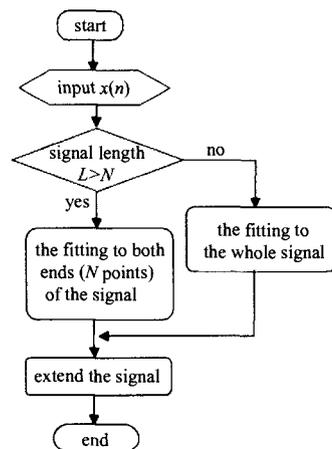


Fig.4 Flowchart of prolongation

$$c'_0 T_0(x) + c'_1 T_1(x) + c'_2 T_2(x).$$

3) 原信号的长度小于等于 N 的延拓

当原信号长度小于等于 N 时, 则直接对整个信号进行一次拟合后再进行左右延拓即可。该延拓模式的流程图, 如图 4 所示。

4 基于正交多项式拟合的延拓方式在小波基线校正中的应用

利用小波变换进行实现对信号的基线校正通过将信号的近似部分置零来实现的^[2,4,6]。图 5 为利用本文所述延拓方式进行小波变换, 对图 1 中带基线信号进行基线校正后得到的重构信号。从图中可以看出, 基于正交多项式拟合的延拓方式对边界效应进行了很好的抑制。

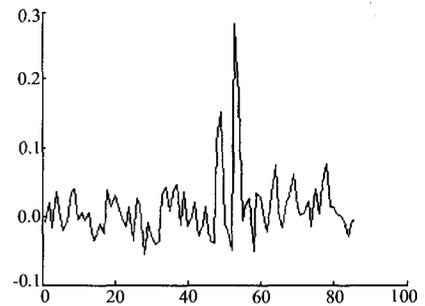


Fig.5 The baseline correction result of the signal in Fig.1 with the extension mode mentioned above

5 结 论

利用 Mallat 算法进行小波分解主要是通过信号与高低通滤波器相卷积来实现的, 而有限长信号进行卷积运算时必须进行边界延拓, 而常用的几种延拓方式未考虑边界处的变换情况或仅关心边界一两个点的变化情况, 而导致小波重构信号产生了强烈的边界效应。为抑制重构信号的边界效应, 本文提出了基于正交多项式拟合的延拓方式。该延拓方式首先拟合出边界处的低频变化规律, 然后据此变换规律进行边界延拓, 通过用于信号的基线校正可以看出, 该延拓方式可以有效地克服小波重构信号的边界效应。该延拓方法的缺点是会增加小波分解的运算量, 但由于采用了正交多项式, 计算量大大减少, 也可以应用于实时运算。由于涉及到有限长信号进行卷积运算时, 必然要考虑边界延拓问题, 该延拓方式在边界处可很好的克服边界效应必将得到推广。

参考文献:

- [1] Mallat S. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation [J]. *IEEE Trans PAMI*, 1989, 11(7): 674-693.
- [2] Wang K Q, Xu L S, WANG L, et al. Pulse baseline wander removal using wavelet approximation [J]. *IEEE Computer in Cardiology*, 2003, 30: 605-608.
- [3] Donoho D L, Johnstone I M. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage [J]. *Biometrika*, 1994, 81: 425-455.
- [4] Catherine Perrin, Beata Walczak, Desire Luc Massart. The use of wavelets for signal denoising in capillary electrophoresis [J]. *Anal. Chem.*, 2001, 73(20): 4903-4917.
- [5] Donoho D L, Johnstone I M. Wavelet shrinkage: asymptopia [J]. *Journal of Royal Statistics Society Series (B)*, 1995, 57: 301-369.
- [6] Shao Xueguang, Alexander Kaiman Leung, Foo-Tim Chau. Wavelet: a new trend in chemistry Acc [J]. *Chem. Res.*, 2003, 36: 276-283.
- [7] Xiong Wei, Fang Yonghua, et al. Wavenumber correction in the information processing for FTIR [J]. *Chinese Journal of Quantum Electronics* (量子电子学报), 2005, 22(2): 165-168 (in Chinese).