

doi: 10.3969/j.issn.1006-7043.2011.10.021

有限差分法求动静压轴颈轴承性能研究

王学敏, 白红宇, 庄明

(中国科学院等离子体物理研究所, 安徽合肥 230031)

摘要: 为了对动静压轴颈轴承性能进行研究, 利用有限差分方法编写了可以计算动静压气体轴承静态、动态和动静混合情况下性能参数的计算程序, 分别讨论了前端角、网格数与收敛精度和偏位角对计算结果的影响。结果证明, 前端角对求轴颈轴承静态性能没有影响, 而网格数需要与收敛精度相匹配, 否则对计算结果影响很大。在求动态性能时加入了偏位角嵌套循环, 考虑了实际气膜厚度表达式对轴承性能的影响。计算结果与有实验验证的算例相比较, 两者误差在 5% 以下, 证明此程序方法计算结果正确可靠, 该方法已成功应用于实际工程设计之中。

关键词: Reynolds 方程; 偏位角; 有限差分法; 前端角; 收敛精度

中图分类号: TH133.36; TH117.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-7043(2011)10-4381-06

Research on problems concerning solutions for the performance of a hybrid gas journal bearing based on the finite difference method

WANG Xuemin, BAI Hongyu, ZHUANG Ming

(Institute of Plasma Physics, Chinese Academy of Sciences, Hefei 230031, China)

Abstract: In order to research the performance of a hybrid gas journal bearing, a calculation program based on the finite difference method was developed. This method can be used to calculate the bearing performance for various types of bearings, such as a hydrostatic gas bearing, hydrodynamic gas bearing, and hybrid gas bearing. The influence of the nosed angle, grid number, convergence precision and attitude angle on calculation results was discussed respectively. It was proven that the nosed angle has no effect on the results of the static performance of the journal bearing. The grid number should match the convergence precision; otherwise the calculation results will be influenced significantly. A nested loop of attitude angle was added to this program in order to calculate the dynamic effect; this loop took into account the influence of gas film thickness expression in the calculation results of the bearing's performance. The calculation results were compared with a case which was validated by an experiment. It showed that the relative errors were below 5%, which proved that the calculation results of this program were highly reliable and accurate. Furthermore, this program has been successfully applied to actual engineering design.

Keywords: Reynolds equation; attitude angle; finite difference method; nosed angle; convergence precision

由于气体润滑介质具有摩擦功率小、无污染、运动精度高等优点, 特别是近年来随着核能和航空航天技术的发展, 其应用前景广阔, 通过求解 Reynolds 方程准确预测轴承性能是气体轴承应用的关键。目前, 已经有多种数值方法应用于对 Reynolds 方程的求解^[1], 其中由于有限差分法编程序灵活、成熟, 其应用最为广泛。国内外虽然有多篇关于利用有限差分法求气体轴承性能的文章^[2-4], 但给出的大都是

未考虑偏位角影响的静态算例, 在求解过程中对一些影响计算精度的因素也并未加以讨论, 本文对用有限差分求解轴颈轴承性能过程中若干影响计算精度的问题进行了细致讨论, 并得出了若干可以提高计算结果精度的结论。

1 Reynolds 方程无量纲化及边界条件

很多文献中都有详细的 Reynolds 方程推导过程^[5-6], 完整的非定常可压缩雷诺方程如下:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 12\mu \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + 6\mu \frac{\partial}{\partial x} [\rho h(u_1 + u_2)] + 6\mu \frac{\partial}{\partial y} [\rho h(w_1 + w_2)] \quad (1)$$

式中: u, v 分别表示环向和轴向线速度; 1、2 下标分

收稿日期: 2010-07-31.

基金项目: 中国科学院重要方向性基金资助项目(KJ CX2-YW-N16).

作者简介: 王学敏(1983-)男, 博士研究生, E-mail: wangxuemin2008@163.com.

白红宇(1971-)男, 研究员, 博士生导师.

通信作者: 王学敏.

别表示轴承和轴颈,假设气膜内是等温过程;主轴在轴承内以 ω 角速度转动,轴向(y 方向)上没有运动; t 为时间; ρ 为气体密度,并且进行无量纲变换,环面方向 $\theta = x/R$, 轴向方向 $Y = y/R$, 气膜高度 $H = h/C_r$, 压力 $P = p/p_a$, 其中 R 为轴承半径, C_r 为气膜间隙, p_a 为出口压力;定义轴承数 $\Lambda = \frac{6\mu UR}{p_a C_r^2}$, 其中 μ 为动力粘度, $U = R\omega = \pi Rn/30$, n 为转速 r/min .

以上代入式(1),得到稳态无量纲化 Reynolds 方程式如下:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{PH^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{PH^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial Y} \right) = \Lambda \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (PH). \quad (2)$$

式中: $H = 1 + \varepsilon \cos \theta$, ε 为偏心率,式(2)的无量纲边界条件为:

1) 气体排入周围环境的边界和对称边界上:

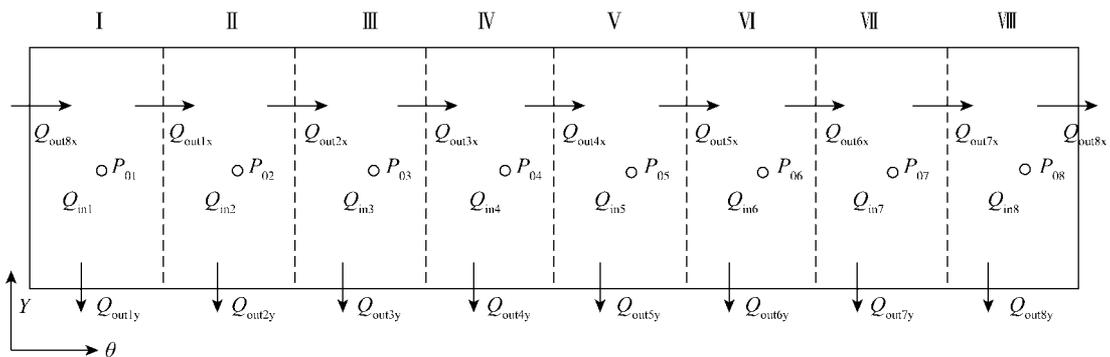


图1 气膜划分区域示意图

Fig.1 Computational domain of journal gas bearings

采用具有二阶精度的中心差分格式的超松弛迭代法(SOR)^[9]对式(2)进行离散,得到离散化 Reynolds 方程式为

$$\left(\frac{2}{\Delta \theta^2} + \frac{2}{\Delta Y^2} \right) P_{ij}^2 - \left(\frac{P_{i+1j} + P_{i-1j}}{\Delta \theta^2} + \frac{P_{ij+1} + P_{ij-1}}{\Delta Y^2} + \frac{3}{H} \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{P_{i+1j} - P_{i-1j}}{2\Delta \theta} - \frac{\Lambda}{H^3} \frac{\partial H}{\partial \theta} \right) P_{ij} + \left[\frac{\Lambda P_{i+1j} - P_{i-1j}}{H^2} \frac{P_{i+1j} - P_{i-1j}}{2\Delta \theta} - \frac{(P_{i+1j} - P_{i-1j})^2}{4\Delta \theta^2} - \frac{(P_{ij+1} - P_{ij-1})^2}{4\Delta Y^2} \right] = 0. \quad (3)$$

每个区域内都要满足质量流量连续的条件,即 $\dot{Q}_m = \dot{Q}_{out}$, 其中流进单个区域内的流量为

$$\dot{Q}_{in} = \phi A_i p_s \sqrt{\frac{2\rho_a}{p_a}} \psi, \quad (4)$$

$$\psi = \begin{cases} \sqrt{\frac{k}{2} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}}, & \beta_i \leq \beta_k = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}; \\ \sqrt{\frac{k}{k-1} [\beta_i^{2/k} - \beta_i^{(k+1)/k}]}, & \beta_i > \beta_k = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}. \end{cases} \quad (5)$$

单个区域流出的质量流量包括:

$$\dot{Q}_{outx} = \int_0^{\frac{L}{2}} \int_0^h \rho v_x dz dy = \frac{\rho_a}{p_a} \int_0^{\frac{L}{2}} \left(\frac{Uh}{2} - \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) p dy. \quad (6)$$

$$Y=0, P=1; Y=L/2R, \frac{\partial P}{\partial Y} = 0.$$

2) 气膜被剪开的两边界上: $P(\theta = 0) = P(\theta = 2\pi)$, 即 $P_{1j} = P_{\Pi j}$, 其中 Π 为最大网格节点数, $dP/dx(\theta = 0) = dP/dx(\theta = 2\pi)$, 即 $(P_{2j} - P_{1j}) / \Delta X = (P_{\Pi j} - P_{\Pi-1j}) / \Delta X$.

2 Reynolds 方程离散化

由于气膜厚度相对于其他几何尺寸小 $10^3 \sim 10^4$ 倍,因此可以略去圆柱表面率的影响,为了便于程序编写,一般都是把圆柱轴承的气膜展开成如图1的一个平面^[7-8],将轴承面按两供气孔的中心线划分为 N 个区域,其中 N 为供气孔数(本文以双排8个供气孔为例).

$$\dot{Q}_{outy} = \int_0^{2\pi R} \int_0^h \rho v_y dz dx = \frac{\rho_a}{p_a} \int_0^{2\pi R} \left(-\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) p dx. \quad (7)$$

式中: x 表示环面方向, y 表示轴向方向, z 为气膜方向, ϕ 为流量系数,一般取值 $0.8 \sim 0.85$, A_i 为节流面积,其中环面节流孔 $A_i = \pi d C_r$, 小孔节流小孔 $A_i = \frac{1}{4} \pi d^2$; $\beta_i = \frac{P_{oi}}{P_s}$ 为孔后压比, P_{oi} 为孔后压力.

轴承承载能力计算为

$$\begin{cases} \bar{W} = \sqrt{W_n^2 + W_t^2}, \\ W_n = \int_0^{L/2R} \int_0^{2\pi} (P-1) \cos \theta d\theta dY, \\ W_t = \int_0^{L/2R} \int_0^{2\pi} (P-1) \sin \theta d\theta dY. \end{cases} \quad (8)$$

式中, W_n 和 W_t 分别表示气膜内压力在偏心方向上对面积积分和与其成直角方向上对面积积分.

3 有限差分法求解过程若干问题

为了比较算法的有效性,本文利用具有解析解的 $\varepsilon = 0$ 时轴颈轴承模型,其模型如图2,具体参数如下:轴承直径 $D = 14 \text{ mm}$, 长度 $L = 33 \text{ mm}$, 两排环

面节流供气小孔,每排 8 个,小孔直径 $d = 0.4 \text{ mm}$, 0.0225 mm 偏心率 $\varepsilon = 0$, 气体工质为氦气,小孔至端面距离 $L_1 = 9.5 \text{ mm}$ 轴承平均半径间隙 $C_r =$

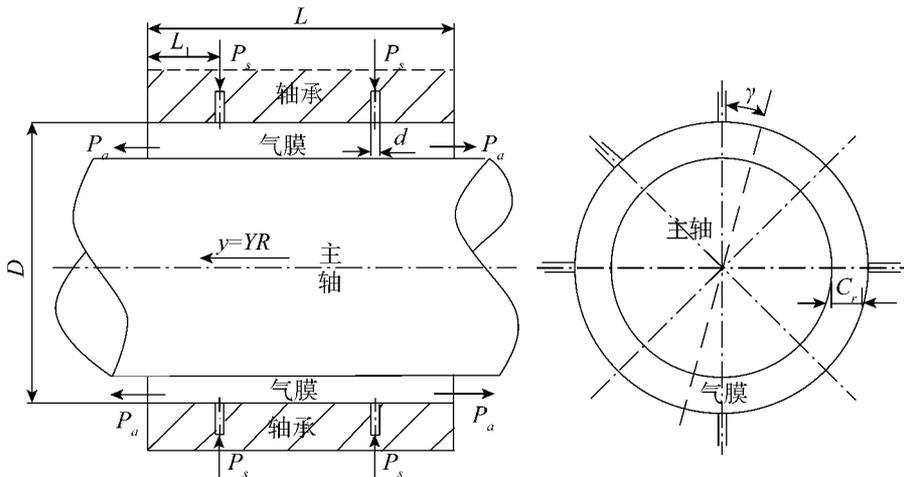


图 2 $\varepsilon = 0$ 时理想模型

Fig. 2 Ideal gas bearing model with $\varepsilon = 0$

理想情况下,当满足收敛条件时,气膜内压力分布应该左右上下完全对称,承载能力 $\bar{W} = 0$. 但实际情况会有以下原因造成载荷不为 0,即存在一个小的载荷误差 W^σ . 正常情况下,载荷误差 W^σ 相比有偏心情况下的载荷为小值,不会对结果产生本质影响.

1) 边界条件 2) 假设被剪开两条边上的压力其与相邻的两条边上压力相等,当网格数不足多时,相邻两条边总会有一定压力差,会导致压力分布并不完全对称.

2) 本程序利用辛朴森公式求压力对面积的积分得到承载能力也会有一定误差.

3.1 前端角 γ 对结果影响

在求轴颈轴承静态特性时,将圆柱形气膜展开成如图 1 长方形计算区域过程中,从什么位置剪开,即气膜圆柱面剪开线与其垂直轴线组成的平面和按竖直轴线剪开平面的夹角 γ (前端角),对计算结果是否会产生影响进行探讨. 本文按照 10° 、 22.5° 和 30° 方向分别展开,并且都以两节流小孔的中心线将计算域划分为 8 个区域. 图 3 为 3 种情况下的计算结果,从图中可以看出,载荷误差 W^σ 都在一个相对比较小的范围,并且没有递增或递减趋势,3 种情况下得到的气体消耗量 Q 基本上都相等,因此说明前端角 γ 对求轴颈轴承静态性能并没有影响,即可以从任意位置将圆柱轴承展开成平面计算区域.

此规律为划分网格区域带来了便利,以 8 个供气孔为例,选择 22.5° 位置将气膜展开成长方形计算区域,可以得到大小相等的 8 个区域,使得在节流小孔位置布网格点更方便,另外还可以避免被剪开的两条边上碰到有节流小孔,使程序处理变得复杂.

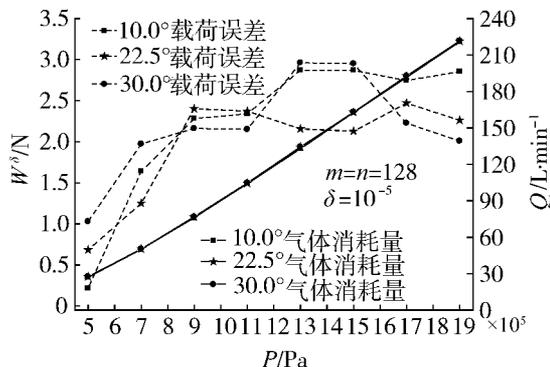


图 3 前端角 γ 对计算结果影响

Fig. 3 Load error and gas consumption versus pressure plot

3.2 网格数与收敛精度 δ 对结果影响

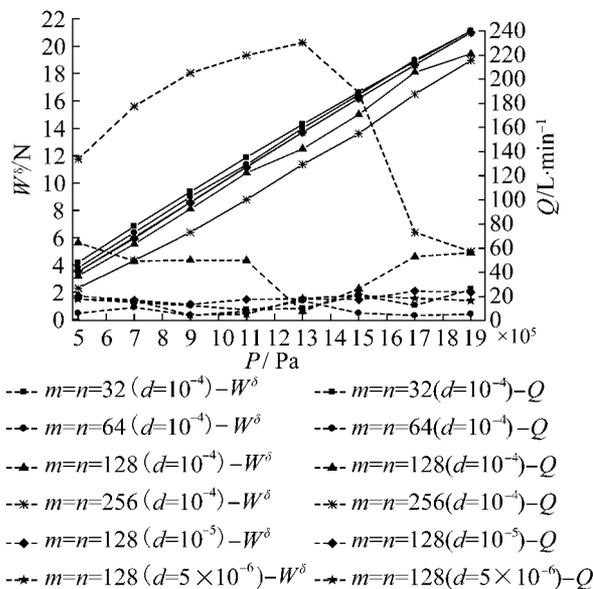


图 4 网格数和收敛精度 δ 对计算结果影响

Fig. 4 Load error and gas consumption versus pressure plot
一般数值计算问题中,网格数与计算精度成正

比,即网格数越多计算结果精度越高.但本文发现此规律在超松弛迭代法(SOR)中并不适用,网格数与计算结果精度并不是成正比,而是与收敛精度 δ 有关,当收敛精度 δ 选择不当,网格数越多计算结果越不精确,有的甚至得到错误的结果,本文对网格数与收敛精度 δ 对计算结果的影响进行了研究.

图4表明,收敛精度取 $\delta = 10^{-4}$ 时,当长宽的网格数 $m = n = 128$ 和 256 时,虽然程序也满足了收敛条件,但载荷误差 W^σ 很大,特别是当 $m = n = 256$ 时,载荷误差 δ 能达到约 20 N ,很显然计算结果是不可信的.相比而言,网格数 $m = n = 32$ 和 64 时,载荷误差 W^σ 在一个比较小的范围,得到的结果更接近实际.当网格数 $m = n = 128$ 不变,提高收敛精度到 $\delta = 10^{-5}$,载荷误差 W^δ 在一个比较小的范围内变化,气体消耗量与网格数 $m = n = 32$ 和 64 时很接近,继续提高收敛精度到 $\delta = 5 \times 10^{-6}$,载荷误差 W^σ 并没有继续减小,而也是在相同小的范围内变化.

因此,在用有限差分解 Reynolds 方程过程中,网格数需要与收敛精度 δ 相匹配,以本文为例,本程序采用具有二阶精度的中心差分格式离散 Reynolds 方程,数值解精度可以达到 $O(\Delta x^2)$,步长 Δx 由网格点数(m, n)和轴承特征长度(或宽度)决定,收敛精度 δ 值至少要小于 Δx^2 数量级才能保证超松弛迭代法(SOR)也具有二阶精度,本文中如果是 $m = n = 64$, δ 值取 1×10^{-4} 合适,如果 $m = n = 128$, δ 值至少需取 5×10^{-5} 合适,依此类推.网格数增多需要同时提高收敛精度 δ ,网格数一定,当收敛精度 δ 值小于某临界值以后,再小对提高数值解精度并没有太大帮助,并且还增加了计算成本,因此一般情况下 δ 值取到 1×10^{-6} 即可.

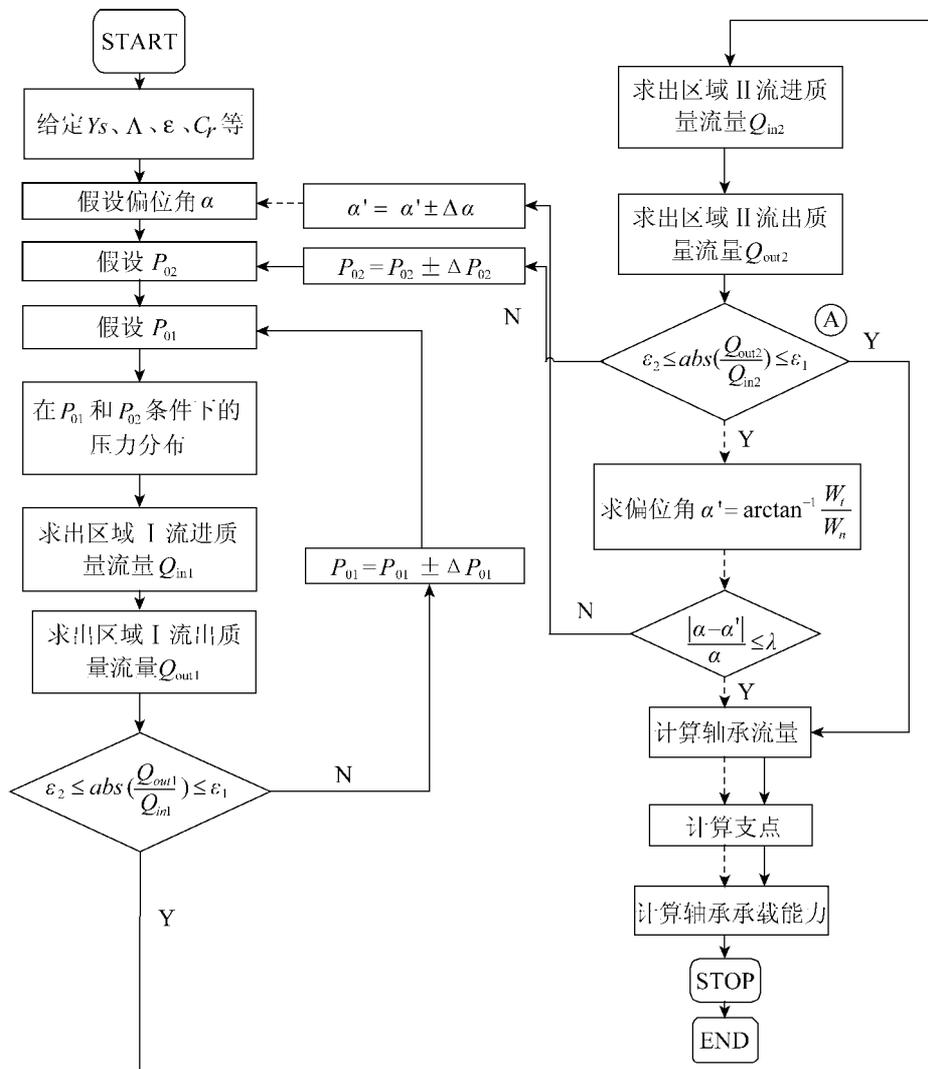


图 5 程序流程图

Fig. 5 Flow chart for calculation program

3.3 偏位角 α 影响

偏位角 α 由负载和转速唯一确定, 当转子的转速不为零时, 轴颈的偏位角也不为零^[10], 此时的气膜厚度表达式应该按实际偏位角方向来计算, 而大多数求解过程都是忽略了偏位角 α 对气膜厚度的影响。

本程序先假设一个小的偏位角度, 在偏位角方向上将气膜展开, 此时的气膜厚度表达式即为实际的气膜厚度, 当满足收敛条件以后, 求得实际的偏位角 $\alpha' = \arctan(W_t/W_n)$, 判断 α' 和 α 是否相等, 不相等则改变初设的 α 重新返回计算, 直至 α' 和 α 的差值与 α 的比小于 ζ , 此时求得的 α' 即为实际情况下的偏位角。

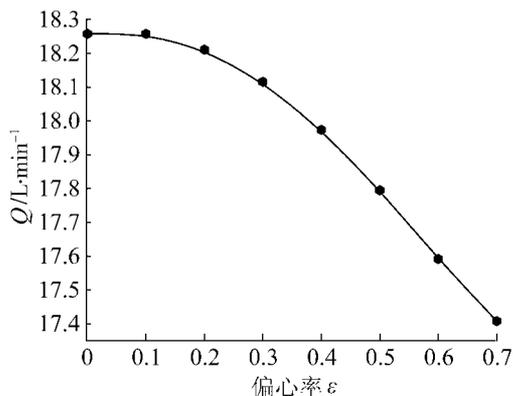
为了节约篇幅, 本文以 2 个节流孔来说明其迭代的流程图如图 5, 节流孔数增多就是再添加如区域 I、II 的质量守恒循环, 流程图中虚线部分表示有转速时需要加入的判断偏位角是否合适的嵌套循环 (如图中 A 位置) 在求轴颈轴承静态性能时按实线流程直接计算轴承流量。

4 算 例

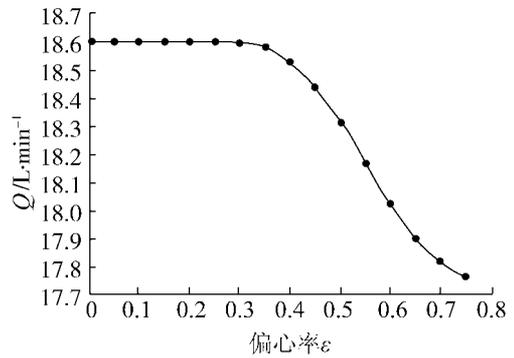
文献 [11] 利用 Marc 软件中的轴承分析模块求解了如下参数的气体轴承静态性能, 并且和试验进行了对比, 具体参数如下: 轴承直径 $D = 45 \text{ mm}$, 长度 $L = 35 \text{ mm}$, 共有两排环面供气孔, 每排 8 个, 节流孔直径 $d = 0.3 \text{ mm}$, 节流孔至断面距离 $l = 10 \text{ mm}$, 轴承平均间隙 $C_r = 0.02 \text{ mm}$, 供气压力 $p_s = 6.5 \times 10^5 \text{ Pa}$ 。

气体消耗量和承载能力随偏心率变化的对比关系分别如图 6、7。

与文献中计算结果相比, 误差在 5% 以下, 产生误差的原因除了程序本身以外, 还与各种方法对文献中未提供的其它参数取值差异有关, 另外收敛精度和网格数的选择对计算结果也有一定影响。



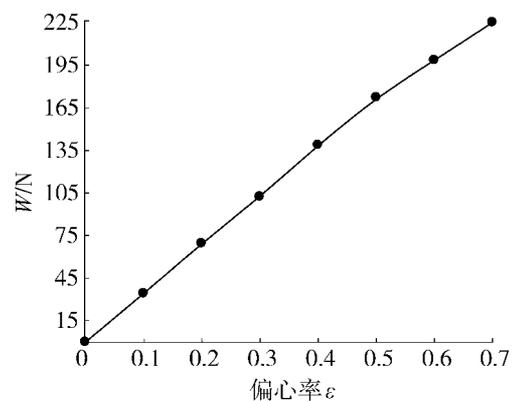
(a) 气体消耗量随偏心率变化关系



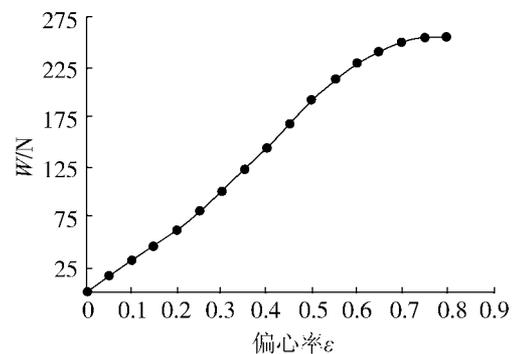
(b) 文献 [11] 计算结果

图 6 气体消耗量计算结果比较

Fig. 6 Comparison of the results for gas consumption



(a) 承载能力随偏心率变化关系



(b) 文献 [11] 计算结果

图 7 承载能力计算结果比较

Fig. 7 Comparison of the results for load capacity

5 结 论

1) 本文利用有限差分法编写了一套可以求静压轴颈轴承静态性能的程序, 引入了零偏心情况下的理想模型, 讨论了前端角 γ 对求轴颈轴承静态性能计算结果的影响, 结果证明前端角 γ 对求轴颈轴承静态性能计算结果没有影响;

2) 对网格数与收敛精度 δ 进行研究发现, 网格数需要与收敛精度 δ 相匹配, 否则对计算结果会造成很大影响;

(下转第 1390 页)

- [J]. *Techniques of Automation&Applications*, 2010, 28 (12): 39-42.
- [2] 焦竹青, 熊伟丽, 张林, 等. 基于信任度的多传感器数据融合及其应用[J]. *东南大学学报自然科学版*, 2008, 38 (A01): 253-257.
JIAO Zhuqing, XIONG Weili, ZHANG Lin, et al. Multi-sensor data fusion method based on belief degree and its applications [J]. *Journal of Southeast University: Natural Science Edition*, 2008, 38(A01): 253-257.
- [3] LEE M F R, STANLEY K, WU Q M J. Implementation of sensor selection and fusion using fuzzy logic [C]// *IFSA World Congress and 20th NAFIPS International Conference*. Vancouver, BC: 2001, 328-333.
- [4] MARTALO M, FERRARI G. A simple information-theoretic analysis of clustered sensor networks with decentralized detection [J]. *IEEE Communications Letters*, 2010, 14(6): 560-562.
- [5] 翟建设, 李娜, 吴青. 基于分簇的无线传感器网络簇内数据融合算法[J]. *计算机工程*, 2008, 34(11): 134-136.
ZHAI Jianshe, LI Na, WU Qing. Improved algorithm of clustering-based data fusion for WSN [J]. *Computer Engineering*, 2008, 34(11): 134-136.
- [6] 马琦, 张记龙, 王志斌. 无线传感器网络簇内自适应融合算法研究[J]. *计算机应用研究*, 2009, 7(26): 2502-2503, 2507.
MA Qi, ZHANG Jilong, WANG Zhibin. Study of adaptive data fusion algorithm within clusters for WSN [J]. *Application Research of Computers*, 2009, 7(26): 2502-2503, 2507.
- [7] 张强, 杨涛. 用于环境监测的自供电传感器网络[J]. *仪表技术与传感器*, 2008, 2: 34-36.
ZHANG Qiang, YANG Tao. Self-powered wireless sensor network for environment monitoring [J]. *Instrument technique and sensor*, 2008, 2: 34-36.
- [8] 齐志才, 马占敖, 江萍. 提高带隙温度传感器精度方法的研究[J]. *仪表技术与传感器*, 2004, 7: 46-47.
QI Zhicai, MA Zhanao, JIANG Ping. Study of method improving accuracy of band-gap temperature sensor [J]. *Instrument Technique and Sensor*, 2004, 7: 46-47.
- [9] 杨雪芳, 蔡萍, 杨重远. 提高容栅位移传感器精度的有效方法[J]. *传感器技术*, 2005, 24(9): 32-34.
YANG Xuefang, CAI Ping, YANG Chongyuan. Effective ways to improve accuracy of capacitive grating displacement sensor [J]. *Journal of Transducer Technology*, 2005, 24(9): 32-34.
- [10] 董九英. 多传感器数据融合的主成分方法研究[J]. *计算机工程与应用*, 2009, 45(33): 111-113.
DONG Jiuying. Study on principle component method for multi-sensor data fusion [J]. *Computer Engineering and Applications*, 2009, 45(33): 111-113.

[责任编辑: 陈 峰]

(上接第1385页)

3) 引入了偏位角 α 的嵌套循环, 考虑了实际气膜厚度表达式对轴承性能的影响, 计算结果与有实验验证的算例比较, 两者误差在 5% 以下, 该方法已成功用于对俄罗斯氦透平膨胀机静压气体轴承端的改造上, 效果良好。

参考文献:

- [1] 吴华鹏, 孔宪梅. GMRES 算法在雷诺方程数值解法中的应用[J]. *润滑与密封*, 2000(1): 2-4.
WU Huapeng, KONG Xianmei. The application of GMRES algorithm in calculation Reynolds equation [J]. *Lubrication Engineering*, 2000(1): 2-4.
- [2] 彭万欢, 蒲如平. 气体静压轴颈轴承的静态特性分析及其试验研究[J]. *润滑与密封*, 2006(12): 204-206.
PENG Wanhuan, PU Ruping. A static performance analysis and experimental study of aerostatic journal bearing [J]. *Lubrication Engineering*, 2006(12): 204-206.
- [3] LO Chengying, WANG Chengchi, LEE Yuhan. Performance analysis of high-speed spindle aerostatic bearings [J]. *Tribology International*, 2005, 38: 5-14.
- [4] 张鸣, 朱煜, 段广洪. 基于 FEMLAB 的气浮轴承静态性能求解方法[J]. *润滑与密封*, 2006(2): 63-65.
ZHANG Ming, ZHU Yu, DUAN Guanghong. A new method based FEMLAB to predict static performance of air bearing [J]. *Lubrication Engineering*, 2006(2): 63-65.
- [5] 十合晋一. 气体轴承设计、制作与应用[M]. 韩浹臣, 译. 北京: 宇航出版社, 1988: 12-20.
- [6] POWELL J W. Design of aerostatic bearings [M]. London: Machinery Publishing Co. Ltd, 1970: 43-47.
- [7] 王云飞. 气体润滑理论与气体轴承设计[M]. 北京: 机械工业出版社, 1999: 19-30.
- [8] 刘敬, 刘育华, 陈世杰. 静压气体润滑[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1990: 40-60.
- [9] 黄云清. 数值计算方法[M]. 北京: 科学出版社, 2009: 70-85.
- [10] 池长青. 气体动静压轴承的动力学和热力学[M]. 北京: 北京航空航天大学, 2008: 60-74.
- [11] 张恩龙. 高速全支撑气体静压电主轴的承载特性研究[D]. 广州: 广州工业大学, 2005: 65-86.

[责任编辑: 陈 峰]