

DOI: 10.3901/JME.2011.23.074

一种用于无人驾驶汽车运动模拟的 3 自由度并联机构动力学建模*

唐国明^{1,2} 梅 涛^{1,2}

(1. 中国科学院合肥智能机械研究所 合肥 230031;

2. 中国科学技术大学精密机械与精密仪器系 合肥 230027)

摘要: 针对无人驾驶汽车半物理仿真试验对运动模拟系统精度要求高的特点, 给出一种以 3-RPS 并联机构为基础的改进型 3 自由度并联机构。与 3-RPS 并联机构相比, 由于该改进型并联机构中的被动约束承受了 3-RPS 并联机构中驱动器所承受的沿其转轴方向的力, 因而改善了驱动器的力学特性。根据该并联机构的结构, 建立运动学方程。基于 Newton-Euler 方法建立平台的动力学方程。根据力矩平衡原理分别计算出同时垂直于驱动器及其转轴的分力以及同时垂直于被动约束上部及其转轴的分力。依照功率守恒原理计算出沿被动约束上部的力。驱动器的驱动力以及被动约束沿转轴的力即可求出。此计算方法对少自由度并联机构的动力学求解有借鉴意义。

关键词: 被动约束 运动学分析 动力学分析 功率守恒

中图分类号: TG156

Dynamic Modeling of a Three Degrees of Freedom Parallel Manipulator for Motion Simulation of Unmanned Vehicle

TANG Guoming^{1,2} MEI Tao^{1,2}

(1. Institute of Intelligent Machines, Chinese Academy of Sciences, Hefei 230031;

2. Department of Precision Machinery and Instrumentation,
University of Science and Technology of China, Hefei 230027)

Abstract: During the semi-physical simulation experiment of unmanned vehicle, taking into account the features of high precision requirement to motion simulation system, a modified three degrees of freedom parallel manipulator based on the 3-RPS parallel manipulator is proposed. In comparison with the 3-RPS parallel manipulator, because the forces along the spinning shafts of the actuators in 3-RPS parallel manipulator are undertaken by the passive constraints of the modified parallel manipulator, the mechanical properties of the actuators are improved. The kinematic equations are established according to the structure of this parallel manipulator. The dynamic equations of the moving platform are formulated based on the Newton-Euler method. In the light of the principle of moment equilibrium, a force which is perpendicular to the actuator and its spinning shaft is worked out, and a force which is perpendicular to the upper part of the passive constraint and its spinning shaft is also worked out. According to the principle of power balance, a force along the upper part of the passive constraint is calculated. The driving forces of the actuators and the forces along the spinning shafts of the passive constraints can be obtained finally. This calculation method sheds light on dynamics calculation of lower mobility parallel manipulators.

Key words: Passive constraint Kinematic analysis Dynamic analysis Power balance

0 前言

随着无人驾驶汽车技术的发展, 对其功能进行全面测试逐渐成为必然趋势。目前, 中国科学院合

肥物质科学研究院正在从事用于无人驾驶汽车测试的半物理仿真系统的研究开发工作。考虑到仿真试验的要求同时也考虑到实际条件的限制, 该半物理仿真系统的运动模拟系统采用一平动两转动的 3 自由度并联机构。

并联机构最早可以追溯到 20 世纪 50 年代 GOUGH 为测试轮胎而设计的八面体平台和

* 安徽省科技创新公共服务平台资助项目(PT20081001)。20101208 收到初稿, 20111009 收到修改稿

STEWART^[1]设计的飞行模拟器。此后,无论是在理论研究上^[2-5]还是工业运用上^[6-8]并联机构均获得蓬勃发展。目前,一类具有被动约束的并联机构由于具有机构刚度高、自微运动小的特点,近年来逐步受到学术界重视。JOSHI等^[9]对3-SPS/PU与3-UPU两种并联机构用作定位机构时的工作空间与刚度特性做了比较研究。SUN等^[10]设计了一种3-UPS/UP型机床并建立了分析刚度模型。赵永生等^[11]介绍了一种新型的5-UPS/PRPU 5自由度并联机床,并通过对其运动学进行分析和计算,确定了中间分支对动平台的约束运动,建立了该机床的运动学反解方程和雅可比矩阵。ZHANG^[12]给出了一种5-UPS/RUU型并联机构并计算了它的刚度。GALLARDO-ALVARADO等^[13]设计了一种2-SPS+RPS/PS型并联机构并作了运动学计算与奇异性分析。SAGLIA等^[14]研究了3-UPS/PU型并联机构的奇异性与灵活性问题。LU等^[15]给出了3-SPU/UPR型并联机构并对其运动学与可达工作空间给予了详细的分析。李剑锋等^[16]分析驱动器布位及冗余驱动对3自由度Tricept并联机构性能的影响,导出相应的机构雅可比矩阵及刚度矩阵并对不同驱动器布位及冗余驱动方式下的机构性能进行分析对比。

由于作者设计的运动机构采用一平动两转动的3自由度并联机构,最初考虑的构型是3-RPS型并联机构。考虑到运动系统的刚度会影响到系统的精度进而会影响到最终试验结果的有效性,加之考虑到被动约束的优良特性,作者对3-RPS型并联机构作了如下修改:将原先连接驱动器与固定平台的转动副改成球铰链,再在每个驱动器外面并行安装一个被动约束机构,此机构与上平台通过球铰链相连,与固定平台通过转动副相连,上下两部分通过转动副连接。

在少自由度并联机构中,由于用来描述动平台位置与方向的运动参数为6个,但在建立方程时的独立运动参数却少于6个,因此通常在6自由度并联机构中使用的求解方法不适合在此使用。对此问题一些比较有代表性的解决方法有如下一些。PENDAR等^[17]首先建立了3-RPS并联机构带Lagrange乘子的动力学方程,然后借助自然正交补矩阵消除Lagrange乘子,最终获得每个驱动器的驱动力。LI等^[18]首先对3-RPS并联机构的单个驱动器建立绕其转轴的力矩平衡方程求出一个同时垂直于驱动器及其转轴的作用力分量,再根据上平台的力、力矩平衡关系求出其余六个力分量,进而求出每个驱动器的驱动力。DASGUPTA等^[19]首先给出了用Newton-Euler方法求解并联机构动力学的总体方法,并对包括3-RPS型并联机构在内的少自由度并联机构提出了依靠力平衡与力矩平衡关系建立补充

方程的建议。SOKOLOV等^[20]首先按照虚功原理建立了动力学方程,然后根据驱动关节的角位移与上平台位姿的关系以及驱动关节的上、下部分与上平台位姿的关系简化动力学方程求出每个驱动器的驱动力。KHALIL等^[21]按照等效树形结构原理建立动力学方程,然后根据主动铰链与上平台在速度上的关系以及驱动器输出端的速度与上平台的速度关系建立补充方程,求得平台所需的驱动力。

本文根据并联机构的结构特点,首先计算出动平台的转动角度、角速度以及角加速度。根据并联机构的运动学特性求出驱动器的速度、加速度以及被动约束的速度、加速度。根据Newton-Euler方法得出动平台的动力学方程;由于设计的并联机构含有三个被动约束,除了需要用到前面文献中介绍的力矩平衡原理,还需要借助功率平衡方程方可最终解出驱动器的驱动力。此计算方法对少自由度并联机构的动力学分析有借鉴意义。

1 并联机构的运动学分析

本文所设计的并联机构如图1所示,由动平台、定平台、驱动器 $A_1P_1B_1$ 、 $A_2P_2B_2$ 与 $A_3P_3B_3$ 以及被动约束 $A_1M_1D_1$ 、 $A_2M_2D_2$ 与 $A_3M_3D_3$ 组成。3个驱动器分别通过球铰链与动平台和定平台相连。3个被动约束分别通过球铰链和转动副与动平台和定平台相连,被动约束上部与下部通过转动副连接。与其他类似功能的3自由度并联机构相比,该并联机构的承载能力与系统刚度比较好,结构元件的受力特性得到改善。

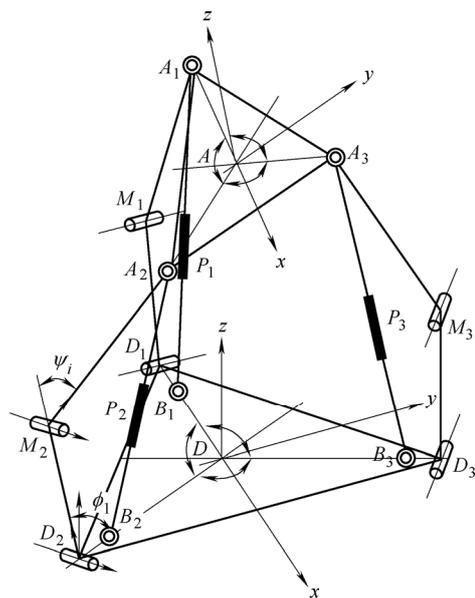


图1 3自由度并联机构原理图

1.1 驱动器的运动学分析

在下文分析之前,首先在动平台与定平台分别建立坐标系 $Axyz$ 、 $Dxyz$ 。假设被动约束的下部 M_iD_i 与下平面的夹角为 ϕ_i ,被动约束的下部 D_iM_i 的延长线与被动约束的上部 M_iA_i 的夹角为 ψ_i , D_2 、 M_2 处转轴的方向如图 1 中的箭头所示,其他位置处转轴的方向以此类推。由于本文给出的并联结构为一种理论模型,为了简化分析,在驱动器上端与被动约束上端位置比较靠近的情况下,将上部的球铰链画成同一个(此种表示方法在 6 自由度并联机构中比较常见,如 6-SPS 双三角机构)。总体坐标如图 1 所示。

动平台上铰链点 A_i ($i=1, 2, 3$) 的坐标 A_i (表示在 $Axyz$ 坐标系中)为

$$\begin{cases} A_1 = (-r_u & 0 & 0)^T \\ A_2 = \frac{r_u}{2} (1 & -\sqrt{3} & 0)^T \\ A_3 = \frac{r_u}{2} (1 & \sqrt{3} & 0)^T \end{cases}$$

式中, r_u 为动平台上铰链点所在圆的半径。

定平台上铰链点 B_i 、 D_i ($i=1, 2, 3$, 下同)的坐标 B_i 、 D_i (表示在 $Dxyz$ 坐标系中)分别为

$$\begin{cases} B_1 = (-r_d & 0 & 0)^T \\ B_2 = \frac{r_d}{2} (1 & -\sqrt{3} & 0)^T \\ B_3 = \frac{r_d}{2} (1 & \sqrt{3} & 0)^T \\ D_1 = (-r_d - \delta & 0 & 0)^T \\ D_2 = \frac{r_d + \delta}{2} (1 & -\sqrt{3} & 0)^T \\ D_3 = \frac{r_d + \delta}{2} (1 & \sqrt{3} & 0)^T \end{cases}$$

式中 r_d ——定平台上铰链点所在圆的半径

δ ——点 D_i 与 B_i 之间的距离

坐标系 $Axyz$ 与坐标系 $Dxyz$ 之间的变换矩阵

R (表示成 ZYZ 欧拉角 β_1 、 β_2 、 β_3 的形式)为

$$R = \begin{pmatrix} c_{\beta_1}c_{\beta_2}c_{\beta_3} - s_{\beta_1}s_{\beta_3} & -c_{\beta_1}c_{\beta_2}s_{\beta_3} - s_{\beta_1}c_{\beta_3} & c_{\beta_1}s_{\beta_2} \\ s_{\beta_1}c_{\beta_2}c_{\beta_3} + c_{\beta_1}s_{\beta_3} & -s_{\beta_1}c_{\beta_2}s_{\beta_3} + c_{\beta_1}c_{\beta_3} & s_{\beta_1}s_{\beta_2} \\ -s_{\beta_2}c_{\beta_3} & s_{\beta_2}s_{\beta_3} & c_{\beta_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{pmatrix} \quad (1)$$

式中, β_1 为绕 Az 轴转角, β_2 为绕 Ay 轴转角, β_3 为绕 Ax 轴转角, $(n_{11} \ n_{21} \ n_{31})^T$ 、 $(n_{12} \ n_{22} \ n_{32})^T$ 与

$(n_{13} \ n_{23} \ n_{33})^T$ 为 $Axyz$ 坐标系相对于 $Dxyz$ 坐标系的方向余弦。

为了表达方便,式(1)中规定 $\sin \beta = s_\beta$, $\cos \beta = c_\beta$,其他表达式依此类推。

把 A_i 点的位置矢量表示在 $Dxyz$ 坐标系中为

$$A'_i = RA_i + P$$

式中, $P=(x_{AD} \ y_{AD} \ z_{AD})^T$ 是动平台中心 A 在坐标系 $Dxyz$ 中的坐标。

由于驱动器 $A_1P_1B_1$ 、 $A_2P_2B_2$ 与 $A_3P_3B_3$ 分别受到被动约束 $A_1M_1D_1$ 、 $A_2M_2D_2$ 与 $A_3M_3D_3$ 的作用,因此 A_1 、 A_2 与 A_3 三点分别在平面 $y_D = 0$, $y_D = -\sqrt{3}x_D$ 与 $y_D = \sqrt{3}x_D$ (下标“ D ”表示这些平面表示在 $Dxyz$ 坐标系中)上运动,可以表示成如下方程式

$$-r_u n_{21} + y_{AD} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2} r_u n_{11} - \frac{\sqrt{3}}{2} r_u n_{12} + x_{AD} - \frac{r_d}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} r_u n_{21} - \frac{\sqrt{3}}{2} r_u n_{22} + y_{AD} + \frac{\sqrt{3}}{2} r_d \right) = 0 \quad (3)$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2} r_u n_{11} + \frac{\sqrt{3}}{2} r_u n_{12} + x_{AD} - \frac{r_d}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} r_u n_{21} + \frac{\sqrt{3}}{2} r_u n_{22} + y_{AD} - \frac{\sqrt{3}}{2} r_d \right) = 0 \quad (4)$$

由式(3)、(4)可以导出

$$n_{21} = n_{12} \quad (5)$$

$$x_{AD} = \frac{r_u}{2} (n_{22} - n_{11}) \quad (6)$$

将式(5)代入式(1)可得

$$\beta_1 + \beta_3 = n\pi \quad n=0, \pm 1, \pm 2 \quad (7)$$

从数学上来说,对于一组指定的 β_1 、 β_2 和 z_{AD} ,可以得到两组可能的驱动器长度,这取决于式(7)中的 n 是奇数还是偶数,考虑到球铰链运动范围的限制,只有 $n=0$ 是物理上可以实现的^[22]。因此

$$\beta_1 = -\beta_3$$

因此式(2)与式(6)可以改写为

$$x_{AD} = -\frac{r_u}{2} (\cos \beta_2 - 1) \cos(2\beta_1)$$

$$y_{AD} = \frac{r_u}{2} (\cos \beta_2 - 1) \sin(2\beta_1)$$

动平台上 A_1 、 A_2 与 A_3 点的速度可以表示为

$$v_{A_i} = v_A + \omega \times (RA_i)$$

式中 v_A ——动平台中心的速度

ω ——动平台的角速度

动平台的角速度 ω 绕 Ax 、 Ay 与 Az 轴的分量 ω_{Ax} 、 ω_{Ay} 与 ω_{Az} 和动平台转角之间的关系为

$$\begin{pmatrix} \omega_{Ax} \\ \omega_{Ay} \\ \omega_{Az} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -s_{\beta 1} & c_{\beta 1}s_{\beta 2} \\ 0 & c_{\beta 1} & s_{\beta 1}s_{\beta 2} \\ 1 & 0 & c_{\beta 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_3 \end{pmatrix}$$

动平台上 A_1 、 A_2 与 A_3 点的速度同样可以表示为

$$\mathbf{v}_{Ai} = \dot{l}_i \mathbf{l}_{ai} + l_i \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{l}_{ai} \quad (8)$$

式中 $\boldsymbol{\omega}_i$ ——驱动器的转动角速度

\dot{l}_i ——驱动器的伸缩速度

l_i ——驱动器的瞬时长度

\mathbf{l}_{ai} ——驱动器轴线方向的矢量

$$\mathbf{l}_{ai} = \frac{\mathbf{L}_i}{l_i}$$

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{A}'_i - \mathbf{B}_i$$

$$l_i = \|\mathbf{A}'_i - \mathbf{B}_i\|$$

在式(8)两边分别点乘与叉乘矢量 \mathbf{l}_{ai} 得

$$\begin{aligned} \dot{l}_i &= \mathbf{v}_{Ai} \cdot \mathbf{l}_{ai} \\ \boldsymbol{\omega}_i &= \frac{\mathbf{l}_{ai} \times \mathbf{v}_{Ai}}{l_i} \end{aligned}$$

动平台上 A_1 、 A_2 与 A_3 三点的加速度可以表示为

$$\mathbf{a}_{Ai} = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times (\mathbf{R}\mathbf{A}_i) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R}\mathbf{A}_i))$$

式中 \mathbf{a}_A ——动平台中点的加速度

$\boldsymbol{\alpha}$ ——动平台的角加速度

动平台角加速度 $\boldsymbol{\alpha}$ 绕 Ax 、 Ay 与 Az 三轴的分量

α_{Ax} 、 α_{Ay} 与 α_{Az} 与动平台的转角有如下关系

$$\begin{pmatrix} \alpha_{Ax} \\ \alpha_{Ay} \\ \alpha_{Az} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -s_{\beta 1} & c_{\beta 1}s_{\beta 2} \\ 0 & c_{\beta 1} & s_{\beta 1}s_{\beta 2} \\ 1 & 0 & c_{\beta 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\beta}_1 \\ \ddot{\beta}_2 \\ \ddot{\beta}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c_{\beta 1} & -s_{\beta 1}s_{\beta 2} & c_{\beta 1}c_{\beta 2} \\ -s_{\beta 1} & c_{\beta 1}s_{\beta 2} & s_{\beta 1}c_{\beta 2} \\ 0 & 0 & -s_{\beta 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 \\ \dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 \end{pmatrix}$$

动平台上 A_1 、 A_2 与 A_3 三点的加速度同样可以表示为

$$\mathbf{a}_{Ai} = \ddot{l}_i \mathbf{l}_{ai} + 2\dot{l}_i \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{l}_{ai} + l_i \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{l}_{ai}) + l_i \boldsymbol{\alpha}_i \times \mathbf{l}_{ai} \quad (9)$$

式中 \ddot{l}_i ——驱动器伸缩加速度

$\boldsymbol{\alpha}_i$ ——驱动器角加速度

在式(9)两端点乘与叉乘 \mathbf{l}_{ai} 得

$$\begin{aligned} \ddot{l}_i &= \mathbf{a}_{Ai} \cdot \mathbf{l}_{ai} + l_i (\boldsymbol{\omega}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i) \\ \boldsymbol{\alpha}_i &= \frac{\mathbf{l}_{ai} \times \mathbf{a}_{Ai} - 2\dot{l}_i \boldsymbol{\omega}_i}{l_i} \end{aligned}$$

假设驱动器下部质心到 B_i 点的长度为 l_c ，上部质心到 A_i 点的长度为 l_p ，则上部质心到 B_i 点的位置矢量 \mathbf{L}_{pci} 与下部质心到 B_i 点的位置矢量 \mathbf{L}_{cci} 分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{cci} &= l_c \mathbf{l}_i \\ \mathbf{L}_{pci} &= \mathbf{L}_i - l_p \mathbf{l}_{ai} \end{aligned}$$

驱动器上部质心的加速度 \mathbf{a}_{pci} 与下部质心的加速度 \mathbf{a}_{cci} 分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{cci} &= \boldsymbol{\alpha}_i \times \mathbf{L}_{cci} + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{L}_{cci}) \\ \mathbf{a}_{pci} &= \ddot{l}_i \mathbf{l}_{ai} + \boldsymbol{\alpha}_i \times \mathbf{L}_{pci} + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{L}_{pci}) + 2\dot{l}_i \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{l}_{ai} \end{aligned}$$

1.2 被动约束的运动学分析

在动平台的位置与方向给定的情况下，被动约束的下部与定平台之间的夹角 ϕ_i 分别表示为

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \arccos \left(\frac{l_d^2 + \|\mathbf{A}'_1 - \mathbf{D}_1\|^2 - l_u^2}{2l_d \|\mathbf{A}'_1 - \mathbf{D}_1\|} \right) + \arccos \left(\frac{\mathbf{A}'_1 - \mathbf{D}_1}{\|\mathbf{A}'_1 - \mathbf{D}_1\|} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \right) \\ \phi_2 &= \arccos \left(\frac{l_d^2 + \|\mathbf{A}'_2 - \mathbf{D}_2\|^2 - l_u^2}{2l_d \|\mathbf{A}'_2 - \mathbf{D}_2\|} \right) + \arccos \left(\frac{\mathbf{A}'_2 - \mathbf{D}_2}{\|\mathbf{A}'_2 - \mathbf{D}_2\|} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}^T \right) \\ \phi_3 &= \arccos \left(\frac{l_d^2 + \|\mathbf{A}'_3 - \mathbf{D}_3\|^2 - l_u^2}{2l_d \|\mathbf{A}'_3 - \mathbf{D}_3\|} \right) + \arccos \left(\frac{\mathbf{A}'_3 - \mathbf{D}_3}{\|\mathbf{A}'_3 - \mathbf{D}_3\|} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}^T \right) \end{aligned}$$

式中， l_u 、 l_d 分别为被动约束上部与下部的长度。

点 M_1 、 M_2 与 M_3 的位置矢量 \mathbf{M}_1 、 \mathbf{M}_2 与 \mathbf{M}_3 可以分别表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1 &= \mathbf{D}_1 + l_d (\cos \phi_1 \quad 0 \quad \sin \phi_1)^T \\ \mathbf{M}_2 &= \mathbf{D}_2 + \frac{l_d}{2} (-\cos \phi_2 \quad \sqrt{3} \cos \phi_2 \quad \sin \phi_2)^T \\ \mathbf{M}_3 &= \mathbf{D}_3 + \frac{l_d}{2} (-\cos \phi_3 \quad -\sqrt{3} \cos \phi_3 \quad \sin \phi_3)^T \end{aligned}$$

被动约束上部的方向矢量 \mathbf{l}_{ui} 与下部的方向矢量 \mathbf{l}_{di} 分别表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_{ui} &= \frac{\mathbf{A}'_i - \mathbf{M}_i}{\|\mathbf{A}'_i - \mathbf{M}_i\|} \\ \mathbf{l}_{di} &= \frac{\mathbf{M}_i - \mathbf{D}_i}{\|\mathbf{M}_i - \mathbf{D}_i\|} \end{aligned}$$

并联机构每个转动副的转轴方向矢量 \mathbf{e}_i (此处假设每个被动约束 D_i 与 M_i 处的两个转动副的轴线平行)表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (0 \quad -1 \quad 0)^T \\ \mathbf{e}_2 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 0 \right)^T \end{aligned}$$

$$\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^T$$

用被动约束表示动平台上点的速度为

$$\mathbf{v}_{Ai} = \omega_{di} \mathbf{e}_i \times (l_d \mathbf{l}_{di} + l_u \mathbf{l}_{ui}) + \omega_{ui} \mathbf{e}_i \times l_u \mathbf{l}_{ui} \quad (10)$$

式中 ω_{di} ——被动约束下部的角速度

ω_{ui} ——被动约束上部的角速度

在式(10)两边分别点乘 $l_d \mathbf{l}_{di} + l_u \mathbf{l}_{ui}$ 与 $l_u \mathbf{l}_{ui}$, 得

$$\omega_{ui} = \frac{\mathbf{v}_{Ai} \cdot (l_d \mathbf{l}_{di} + l_u \mathbf{l}_{ui})}{\mathbf{e}_i \cdot (l_u \mathbf{l}_{ui} \times (l_d \mathbf{l}_{di} + l_u \mathbf{l}_{ui}))}$$

$$\omega_{di} = \frac{\mathbf{v}_{Ai} \cdot l_u \mathbf{l}_{ui}}{\mathbf{e}_i \cdot ((l_d \mathbf{l}_{di} + l_u \mathbf{l}_{ui}) \times l_u \mathbf{l}_{ui})}$$

被动约束上部中点的速度 \mathbf{v}_{uci} 与下部中点的速度 \mathbf{v}_{dci} 为

$$\mathbf{v}_{uci} = \omega_{di} \mathbf{e}_i \times (l_d \mathbf{l}_{di} + l_{uc} \mathbf{l}_{ui}) + \omega_{ui} \mathbf{e}_i \times l_{uc} \mathbf{l}_{ui}$$

$$\mathbf{v}_{dci} = \omega_{di} \mathbf{e}_i \times l_{dc} \mathbf{l}_{di}$$

式中, l_{uc} 、 l_{dc} 分别是 D_i 到被动约束下部中点的距离与 M_i 到被动约束上部中点的距离。

对式(10)求导数得

$$\mathbf{a}_{Ai} = \alpha_{di} \mathbf{e}_i \times (l_d \mathbf{l}_{di} + l_u \mathbf{l}_{ui}) + \alpha_{ui} \mathbf{e}_i \times l_u \mathbf{l}_{ui} + \mathbf{S}_i \quad (11)$$

式中 $\mathbf{S}_i = \omega_{di} \mathbf{e}_i \times (\omega_{di} \mathbf{e}_i \times l_d \mathbf{l}_{di}) + (\omega_{di} \mathbf{e}_i + \omega_{ui} \mathbf{e}_i) \times ((\omega_{di} \mathbf{e}_i + \omega_{ui} \mathbf{e}_i) \times l_u \mathbf{l}_{ui})$

α_{di} ——被动约束下部的角加速度

α_{ui} ——被动约束上部的角加速度

在式(11)两边分别点乘 $l_d \mathbf{l}_{di} + l_u \mathbf{l}_{ui}$ 与 $l_u \mathbf{l}_{ui}$ 得

$$\alpha_{ui} = \frac{(\mathbf{a}_{Ai} - \mathbf{S}_i) \cdot (l_d \mathbf{l}_{di} + l_u \mathbf{l}_{ui})}{\mathbf{e}_i \cdot (l_u \mathbf{l}_{ui} \times (l_d \mathbf{l}_{di} + l_u \mathbf{l}_{ui}))}$$

$$\alpha_{di} = \frac{(\mathbf{a}_{Ai} - \mathbf{S}_i) \cdot l_u \mathbf{l}_{ui}}{\mathbf{e}_i \cdot ((l_d \mathbf{l}_{di} + l_u \mathbf{l}_{ui}) \times l_u \mathbf{l}_{ui})}$$

至此, 被动约束上部中点的加速度 \mathbf{a}_{uci} 与下部中点的加速度 \mathbf{a}_{dci} 分别为

$$\mathbf{a}_{uci} = \alpha_{di} \mathbf{e}_i \times (l_d \mathbf{l}_{di} + l_{uc} \mathbf{l}_{ui}) + \alpha_{ui} \mathbf{e}_i \times l_{uc} \mathbf{l}_{ui} + (\omega_{di} \mathbf{e}_i + \omega_{ui} \mathbf{e}_i) \times ((\omega_{di} \mathbf{e}_i + \omega_{ui} \mathbf{e}_i) \times l_{uc} \mathbf{l}_{ui}) + \omega_{di} \mathbf{e}_i \times (\omega_{di} \mathbf{e}_i \times l_d \mathbf{l}_{di})$$

$$\mathbf{a}_{dci} = \alpha_{di} \mathbf{e}_i \times l_{dc} \mathbf{l}_{di} + \omega_{di} \mathbf{e}_i \times (\omega_{di} \mathbf{e}_i \times l_{dc} \mathbf{l}_{di})$$

2 并联机构的动力学分析

2.1 运动平台的动力学方程

考虑所有作用在动平台上的力, 动平台沿 Dx 轴、 Dy 轴与 Dz 轴的方程式为

$$-m_m \mathbf{a}_A + m_m \mathbf{g} + \mathbf{F}_e -$$

$$\sum_{i=1}^3 (\mathbf{F}_{AAi}^t + \mathbf{F}_{AAi}^n) - (\mathbf{F}_{CAi}^n + \mathbf{F}_{CAi}^{t1} + \mathbf{F}_{CAi}^{t2}) = 0 \quad (12)$$

式中 m_m ——动平台的质量

\mathbf{F}_e ——作用在动平台上的外力

\mathbf{F}_{AAi} ——驱动器与动平台之间的作用力, 可以分解为沿驱动器轴向的分量 \mathbf{F}_{AAi}^n 与同时垂直于驱动器轴向与其转轴方向的分量 \mathbf{F}_{AAi}^t

\mathbf{F}_{CAi} ——被动约束与动平台之间的作用力, 可以分解为沿被动约束上部方向的力 \mathbf{F}_{CAi}^n 与垂直于被动约束上部的力 \mathbf{F}_{CAi}^{t1} 和 \mathbf{F}_{CAi}^{t2} , 其中力 \mathbf{F}_{CAi}^{t1} 是沿被动约束分支转轴方向, 而力 \mathbf{F}_{CAi}^{t2} 是同时垂直于力 \mathbf{F}_{CAi}^{t1} 、 \mathbf{F}_{CAi}^n 的分量

考虑所有作用在动平台上的力矩, 动平台绕 Dx 轴、 Dy 轴与 Dz 轴的方程式为

$$\mathbf{T}_e - \mathbf{T}_I - \sum_{i=1}^3 (\mathbf{T}_{AAi}^t + \mathbf{T}_{AAi}^n) - \sum_{i=1}^3 (\mathbf{T}_{CAi}^n + \mathbf{T}_{CAi}^{t1} + \mathbf{T}_{CAi}^{t2}) = 0 \quad (13)$$

式中 \mathbf{T}_e ——作用在动平台上的外力矩

\mathbf{T}_{AAi}^n , \mathbf{T}_{AAi}^t ——力 \mathbf{F}_{AAi}^n 与 \mathbf{F}_{AAi}^t 产生的力矩

\mathbf{T}_{CAi}^n , \mathbf{T}_{CAi}^{t1} , \mathbf{T}_{CAi}^{t2} ——力 \mathbf{F}_{CAi}^n 、 \mathbf{F}_{CAi}^{t1} 与 \mathbf{F}_{CAi}^{t2} 产生的力矩

\mathbf{T}_I ——动平台的惯性矩

$$\mathbf{T}_I = \mathbf{R} \mathbf{I}_m \mathbf{R}^T \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R} \mathbf{I}_m \mathbf{R}^T \boldsymbol{\omega})$$

\mathbf{I}_m ——动平台在局部坐标系 $Axyz$ 中的惯性矩

2.2 驱动器的动力学方程

根据力矩平衡原理, 驱动器上的力

$$\mathbf{F}_{AAi}^t = -m_p (l_{ai} \times (\mathbf{g} \times l_{ai})) \frac{l_i - l_p}{l_i} -$$

$$m_c (l_{ai} \times (\mathbf{g} \times l_{ai})) \frac{l_c}{l_i} + \frac{\boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i)}{l_i} + \frac{\mathbf{I}_i \boldsymbol{\alpha}_i}{l_i} +$$

$$m_p (l_{ai} \times (\mathbf{a}_{pci} \times l_{ai})) \frac{l_i - l_p}{l_i} + m_c (l_{ai} \times (\mathbf{a}_{cci} \times l_{ai})) \frac{l_c}{l_i}$$

式中 m_c , m_p ——驱动器下部与上部的质量

$$\mathbf{I}_i = \mathbf{T}_i (\mathbf{I}_c + \mathbf{I}_{pi}) \mathbf{T}_i^T$$

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$

$$\mathbf{I}_c = \mathbf{I}_{cc} + m_c l_c^2 \text{diag}(1 \ 1 \ 1)$$

$$\mathbf{I}_{pi} = \mathbf{I}_{pc} + m_p (l_i - l_p)^2 \text{diag}(1 \ 1 \ 1)$$

$$\mathbf{T}_i = (l_{ai} \ \mathbf{k} \times l_{ai} \ l_{ai} \times (\mathbf{k} \times l_{ai}))$$

\mathbf{I}_{cc} , \mathbf{I}_{pc} ——第 i 个驱动器下部与上部的转动惯量(表示在局部坐标系中)

2.3 被动约束的动力学方程

根据被动约束的力矩平衡，得出

$$F_{CAi}^{t2} = m_u \mathbf{g} \cdot (\mathbf{l}_u \times \mathbf{e}_i) \frac{l_{uc}}{l_u} + m_u \mathbf{a}_{uci} \cdot (\mathbf{l}_u \times \mathbf{e}_i) \frac{l_{uc}}{l_u} + \frac{(\omega_u \mathbf{e}_i + \omega_{di} \mathbf{e}_i) \times (\mathbf{T}_u \mathbf{I}_u \mathbf{T}_u^T (\omega_u \mathbf{e}_i + \omega_{di} \mathbf{e}_i))}{l_u} \cdot (\mathbf{l}_{di} \times \mathbf{e}_i) + \frac{\mathbf{T}_u \mathbf{I}_u \mathbf{T}_u^T (\alpha_u \mathbf{e}_i + \alpha_{di} \mathbf{e}_i)}{l_u} \cdot (\mathbf{l}_u \times \mathbf{e}_i)$$

式中 $\mathbf{I}_u = \mathbf{I}_{uc} + m_u l_{uc}^2 \text{diag}(1 \ 1 \ 1)$

$$\mathbf{T}_u = (\mathbf{l}_u \ \mathbf{e}_i \ \mathbf{l}_u \times \mathbf{e}_i)$$

$$\mathbf{T}_{di} = (\mathbf{l}_{di} \ \mathbf{e}_i \ \mathbf{l}_{di} \times \mathbf{e}_i)$$

根据功率守恒原理，在忽略系统热流以及内能的情况下，系统中动能和势能的变化是由于对系统做了机械功的结果^[23]

$$W = \dot{E}_{Kt} + \dot{E}_{Kr} + \dot{E}_P$$

式中 W ——系统的机械功

\dot{E}_{Kt} ——系统平动动能的变化

\dot{E}_{Kr} ——系统转动动能的变化

\dot{E}_P ——系统势能的变化

根据图 2 得出系统总能量

$$E_{ti} = \frac{1}{2} m_u \mathbf{v}_{uci}^T \mathbf{v}_{uci} + \frac{1}{2} (\omega_u \mathbf{e}_i + \omega_{di} \mathbf{e}_i)^T \times \mathbf{T}_u \mathbf{I}_u \mathbf{T}_u^T (\omega_u \mathbf{e}_i + \omega_{di} \mathbf{e}_i) + \frac{1}{2} m_d \mathbf{v}_{dci}^T \mathbf{v}_{dci} + \frac{1}{2} (\omega_{di} \mathbf{e}_i)^T \mathbf{T}_{di} \mathbf{I}_{dc} \mathbf{T}_{di}^T (\omega_{di} \mathbf{e}_i) + m_u \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{uci} + m_d \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{dci} \quad (14)$$

式中 m_u, m_d ——被动约束上部与下部的质量

$\mathbf{I}_{uc}, \mathbf{I}_{dc}$ ——被动约束上部与下部的惯性矩

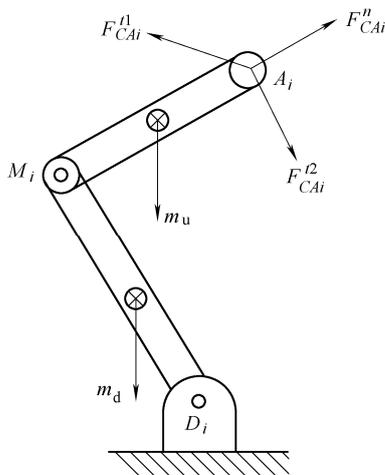


图 2 单个被动约束受力简图

对式(14)求一阶导数得系统总能量的变化率

$$\dot{E}_{ti} = m_u \mathbf{a}_{uci}^T \mathbf{v}_{uci} +$$

$$(\alpha_u \mathbf{e}_i + \alpha_{di} \mathbf{e}_i)^T \mathbf{T}_u \mathbf{I}_u \mathbf{T}_u^T (\omega_u \mathbf{e}_i + \omega_{di} \mathbf{e}_i) + \frac{1}{2} (\omega_u \mathbf{e}_i + \omega_{di} \mathbf{e}_i)^T ((\omega_u \mathbf{e}_i + \omega_{di} \mathbf{e}_i) \times (\mathbf{T}_u \mathbf{I}_u \mathbf{T}_u^T (\omega_u \mathbf{e}_i + \omega_{di} \mathbf{e}_i))) + m_d \mathbf{a}_{dci}^T \mathbf{v}_{dci} + (\alpha_{di} \mathbf{e}_i)^T \mathbf{T}_{di} \mathbf{I}_{dc} \mathbf{T}_{di}^T (\omega_{di} \mathbf{e}_i) + \frac{1}{2} (\omega_{di} \mathbf{e}_i)^T ((\omega_{di} \mathbf{e}_i) \times (\mathbf{T}_{di} \mathbf{I}_{dc} \mathbf{T}_{di}^T (\omega_{di} \mathbf{e}_i))) + m_u \mathbf{g}^T \mathbf{v}_{uci} + m_d \mathbf{g}^T \mathbf{v}_{dci}$$

如图 2 所示，当力 F_{CAi}^{t2} 与 F_{CAi}^{t1} 作用在被动约束上部 A_i 时(力 F_{CAi}^{t1} 不做功)，有

$$P_i = F_{CAi}^{t2} \mathbf{v}_{Ai} \cdot (\mathbf{l}_u \times \mathbf{e}_i) + F_{CAi}^n \mathbf{v}_{Ai} \cdot \mathbf{l}_u = \dot{E}_{ti} \quad (15)$$

将式(15)表示成矩阵形式有

$$\mathbf{F}_{CA}^n = \mathbf{\Gamma} - \mathbf{A} \mathbf{F}_{CA}^{t2}$$

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \dot{E}_{t1} & \dot{E}_{t2} & \dot{E}_{t3} \\ \mathbf{v}_{A1} \cdot \mathbf{l}_{u1} & \mathbf{v}_{A2} \cdot \mathbf{l}_{u2} & \mathbf{v}_{A3} \cdot \mathbf{l}_{u3} \end{pmatrix}^T$$

$$\mathbf{A} = \text{diag} \left(\frac{\mathbf{v}_{A1} \cdot (\mathbf{l}_{u1} \times \mathbf{e}_1)}{\mathbf{v}_{A1} \cdot \mathbf{l}_{u1}}, \frac{\mathbf{v}_{A2} \cdot (\mathbf{l}_{u2} \times \mathbf{e}_2)}{\mathbf{v}_{A2} \cdot \mathbf{l}_{u2}}, \frac{\mathbf{v}_{A3} \cdot (\mathbf{l}_{u3} \times \mathbf{e}_3)}{\mathbf{v}_{A3} \cdot \mathbf{l}_{u3}} \right)$$

$$\mathbf{F}_{CA}^{t2} = (F_{CA1}^{t2} \ F_{CA2}^{t2} \ F_{CA3}^{t2})^T$$

$$\mathbf{F}_{CA}^n = (F_{CA1}^n \ F_{CA2}^n \ F_{CA3}^n)^T$$

把式(12)、式(13)写成矩阵形式有

$$\mathbf{N} \mathbf{F} = \mathbf{Q}$$

$$\mathbf{F} = (F_{AA1}^n \ F_{AA2}^n \ F_{AA3}^n \ F_{CA1}^{t1} \ F_{CA2}^{t1} \ F_{CA3}^{t1})^T$$

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \frac{l_{a1}}{(\mathbf{R}A_1) \times \mathbf{l}_{a1}} & \frac{l_{a2}}{(\mathbf{R}A_2) \times \mathbf{l}_{a2}} & \frac{l_{a3}}{(\mathbf{R}A_3) \times \mathbf{l}_{a3}} \\ \frac{\mathbf{e}_1}{(\mathbf{R}A_1) \times \mathbf{e}_1} & \frac{\mathbf{e}_2}{(\mathbf{R}A_2) \times \mathbf{e}_2} & \frac{\mathbf{e}_3}{(\mathbf{R}A_3) \times \mathbf{e}_3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -m_m \mathbf{a}_A + m_m \mathbf{g} + \mathbf{F}_c - \sum_{i=1}^3 \mathbf{F}_{AAi}^t - \sum_{i=1}^3 (\mathbf{F}_{CAi}^n + \mathbf{F}_{CAi}^{t2}) \\ \mathbf{T}_c - \mathbf{T}_1 - \sum_{i=1}^3 \mathbf{T}_{AAi}^t - \sum_{i=1}^3 (\mathbf{T}_{CAi}^n + \mathbf{T}_{CAi}^{t2}) \end{pmatrix}$$

一般情况下 \mathbf{N} 是非奇异的，所以有

$$\mathbf{F} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{Q}$$

驱动器输出端的驱动力可以表示为

$$F_{di} = m_p \mathbf{a}_{Ai} \cdot \mathbf{l}_{ai} + F_{AAi}^n - m_p \mathbf{g} \cdot \mathbf{l}_{ai}$$

被动约束转轴方向的作用力为

$$F_{CDi}^S = F_{CAi}^{t1}$$

式中， F_{CDi}^S 为被动约束在 D_i 处沿转轴方向的作用力。

被动约束在 D_i 处承受的弯矩为

$$T_{CDi} = F_{CAi}^{t1} \cdot \|A_i' - D_i\|$$

式中, T_{CDi} 为在被动约束在 D_i 处产生的弯矩。

3 计算实例

此处给出一个计算实例, 以说明前述计算过程。各参数如下: $m_p = 12.6 \text{ kg}$, $m_c = 48.5 \text{ kg}$, $m_u = 36 \text{ kg}$, $m_d = 36 \text{ kg}$, $m_m = 925 \text{ kg}$, $l_u = 1.2 \text{ m}$, $l_d = 1.2 \text{ m}$, $l_c = 0.4 \text{ m}$, $l_p = 0.5 \text{ m}$, $r_u = 0.6928 \text{ m}$, $r_d = 0.866 \text{ m}$, $\delta = 0.27 \text{ m}$, $I_{pc} = \text{diag}(1.98 \ 1.98 \ 0.85) \text{ kg/m}^2$, $I_{cc} = \text{diag}(4.49 \ 4.49 \ 1.82) \text{ kg/m}^2$, $I_{uc} = \text{diag}(19.2 \ 27.6 \ 5.8) \text{ kg/m}^2$, $I_{dc} = \text{diag}(19.2 \ 27.6 \ 5.8) \text{ kg/m}^2$, $I_m = \text{diag}(55 \ 121 \ 93) \text{ kg/m}^2$ 。

运动平台的轨迹如下

$$\begin{cases} x_{AD} = 0.015 \cos \phi \\ y_{AD} = 0.015 \sin \phi \\ z_{AD} = z_0 + \frac{h}{T} t \end{cases}$$

式中, $T = 2 \text{ s}$, $h = 0.09 \text{ m}$, $0 < t < 2$, $\phi = 2\pi t/T = \pi t$, $z_0 = 1.92 \text{ m}$, 其他参数均为 0。

仿真结果如下。图 3 是动平台走预定轨迹时每只驱动器的输出力曲线。

图 4 是动平台走预定轨迹时每个被动约束转轴方向的受力曲线。

图 5 是动平台走预定轨迹时, 每个被动约束在 D_i 处产生的弯矩曲线。

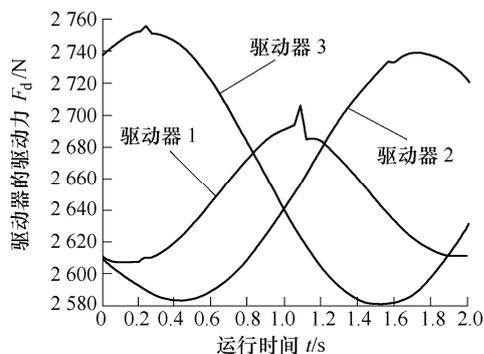


图 3 驱动器的驱动力曲线

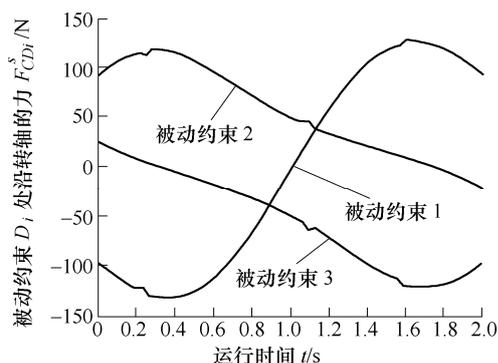


图 4 被动约束转轴方向的受力曲线

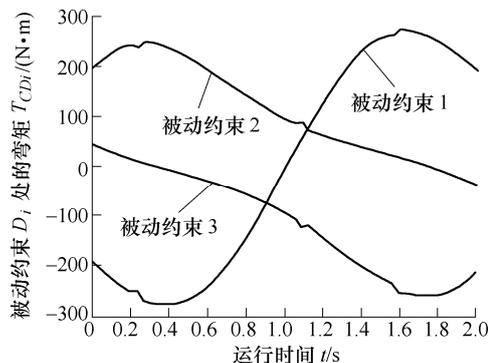


图 5 被动约束承受的弯矩曲线

4 结论

(1) 本文给出了一种基于 3-RPS 结构设计的 3 自由度并联机构。由于该并联机构中的被动约束承受了 3-RPS 结构中垂直于驱动器轴向的力, 因此改善了机构中部件的力学特性。

(2) 借助于力矩平衡原理与功率平衡原理, 解决了带被动约束的少自由度并联机构由于动平台独立位姿参数少于 6 个而使得一般 6 自由度并联机构动力学计算方法无法直接运用的问题。

(3) 仿真结果表明被动约束上承受了一定的力与力矩。在 3-RPS 结构中这些力与力矩是由驱动器承担。本数字仿真是在假设外力及外力矩为零的条件下计算的结果, 在外力及外力矩存在的情况下, 被动约束上产生的力和力矩会更大, 被动约束的作用亦会更加凸显出来。

参考文献

- [1] STEWART D. A platform with six degrees of freedom[J]. Proc. IMechE, 1965, 180: 371-385.
- [2] GRFFIS M, DUFFY J. Forward displacement analysis of a class of Stewart platforms[J]. Journal of Robotic Systems, 1989, 6(6): 703-720.
- [3] MA Jianming, HUANG Qitao, XIONG Haiguang, et al. Analysis and application of the singularity locus of the Stewart platform[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2011, 24(1): 133-140.
- [4] NANUA P, WALDRON K J, MURTHY V. Direct kinematic solution of a Stewart platform[J]. IEEE Transaction on Robotics and Automation, 1990, 6(4): 438-444.
- [5] RAGHAVAN M. The Stewart platform of general geometry has 40 configurations[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 1993, 115(2): 277-282.
- [6] FREEMAN J S, WATSON G, PAPELIS Y E, et al. The

- IOWA driving simulator: An implementation and application overview[R]. SAE, 1995, 950174.
- [7] HAO Qi, GUAN Liwen, WANG Jinsong, et al. Dynamic feedforward control of a novel 3-PSP 3-DOF parallel manipulator[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2011, 24(4): 676-684.
- [8] PREUMONT A, HORODINCA M, ROMANESCU I, et al. A six-axis single-stage active vibration isolator based on Stewart platform[J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 300(3): 644-661.
- [9] JOSHI S, TSAI L W. A comparison study of two 3-DOF parallel manipulators: One with three and the other with four supporting legs[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 2003, 19(2): 200-209.
- [10] SUN Tao, SONG Yimin, LI Yonggang, et al. Stiffness estimation for the 4-DOF hybrid module of a novel reconfigurable robot[C]//ASME/IFTOMM International Conference on Reconfigurable Mechanisms and Robots, June 22-24, 2009, Kings Coll London, London. 2009: 565-571.
- [11] 赵永生, 郑魁敬, 李秦川, 等. 5-UPS/PRPU 5 自由度并联机床运动学分析[J]. 机械工程学报, 2004, 40(2): 12-16.
- ZHAO Yongsheng, ZHENG Kuijing, LI Qinchuan, et al. Kinematic analysis of 5-UPS/PRPU 5-DOF parallel machine tool[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2004, 40(2): 12-16.
- [12] ZHANG Dan. Global stiffness modeling and optimization of a 5-DOF parallel mechanism[C]//Proceedings of IEEE International Conference on Mechatronics and Automation, August 9 -12, 2009, Changchun, Jilin. 2009: 3551-3556.
- [13] GALLARDO-ALVARADO J, OROZCO-MENDOZA H, MAEDA-SÁNCHEZ A. Acceleration and singularity analyses of a parallel manipulator with a particular topology[J]. Meccanica, 2007, 42: 223-238.
- [14] SAGLIA J A, DAI J S. Geometry and Kinematic analysis of a redundantly actuated parallel mechanism that eliminates singularities and improves dexterity[J]. Journal of Mechanical Design, 2008, 130: 1-5.
- [15] LU Yi, HU Bo. Analyzing kinematics and solving active/constrained forces of a 3SPU + UPR parallel manipulator[J]. Mechanism and Machine Theory, 2007, 42: 1298-1313.
- [16] 李剑锋, 费仁元, 范金红, 等. 驱动器布位及冗余驱动对 Tricept 并联机构性能的影响[J]. 机械工程学报, 2008, 44(1): 31-39.
- LI Jianfeng, FEI Renyuan, FAN Jinhong, et al. Effects of actuator disposition and redundant actuation on performance of the tricept parallel mechanism[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2008, 44(1): 31-39.
- [17] PENDAR H, VAKIL M. Efficient dynamic equations of 3-RPS parallel mechanism through Lagrange method[C]//Proceedings of the IEEE Conference on Robotics, Automation and Mechatronics, December 1-3, 2004, Singapore. 2004: 1152-1157.
- [18] LI Jianfeng, WANG Jinsong, LIU Xinjun. An efficient method for inverse dynamics of kinematically defective parallel platforms[J]. Journal of Robotic Systems, 2002, 19(2): 45-61.
- [19] DASGUPTA B, CHOUDHURY P. A general strategy based on the Newton-Euler approach for the dynamic formulation of parallel manipulators[J]. Mechanism and Machine Theory, 1999, 34: 801-824.
- [20] SOKOLOV A, XIROUCHAKIS P. Dynamics analysis of a 3-DOF parallel manipulator with R-P-S joint structure[J]. Mechanism and Machine Theory, 2007, 42: 541-557.
- [21] KHALIL W, IBRAHIM O. General solution for the dynamic modeling of parallel robots[J]. Journal of Intelligent Robot System, 2007, 49: 19-37.
- [22] LEE K M, SHAH D K. Kinematic analysis of a three degrees of freedom in-parallel actuated manipulator[C]//Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation, March, 1987, Raleigh, North Carolina. 1987: 345-350.
- [23] RUINA A, PRATAP R. Introduction to statics and dynamics[M]. Oxford: Oxford University Press, 2010.

作者简介: 唐国明(通信作者), 男, 1980 出生, 博士研究生。主要研究方向为汽车系统动力学、机器人学与半物理仿真。

E-mail: guoming_t@yeah.net