

文章编号: 1007-5461(2002)05-0414-04

## 高斯光束圆环衍射与光学系统质量评价

饶瑞中

(中国科学院安徽光学精密机械研究所大气光学研究室, 合肥 230031)

**摘 要** 根据任意波型的光波的小孔衍射公式计算了高斯光束圆环衍射的光强分布与环围功率分布; 分析了以平面波的圆孔衍射分析激光发射光学系统的光学质量所造成的误差。指出: 正确地评价光学系统的质量, 必须考虑入射波型和光学系统的具体结构。

**关键词** 衍射; 高斯光束; 光学质量因子

**中图分类号**: O436.1 **文献标识码**: A

## 1 引 言

大口径光学发射系统的光学质量对光束的传输或成像能力至关重要。评价光学质量的一种简单方法是用焦平面上的光斑尺寸相对于衍射极限光斑尺寸的倍数 (即光学质量因子) 来表示。一般地, 光学质量因子的计算都是针对光学发射系统的主镜孔径, 而不考虑发射系统的具体结构。对于强激光的应用, 发射系统一般是反射式的 Cassegrain 望远镜, 出射光经过了一个圆环口径。由于圆环衍射与圆孔衍射的不同, 按圆孔计算的光学质量因子必然不能正确地评价发射系统的光学质量。另一方面, 光学质量因子的计算一般针对平面波的结果, 而不考虑光波的具体波型结构, 不难推断平面波的结果对激光是不合适的。

对于高斯光束的衍射问题, 不能简单地套用球面波的衍射公式。本文首先根据 Kirchhoff 衍射理论, 导出 Fraunhofer 衍射的一般形式, 然后对平面波和高斯光束的圆环衍射作出分析, 估算因混淆圆环与圆孔衍射或混淆高斯光束与平面波得到的光学质量因子的误差。

## 2 任意入射波的 Fraunhofer 衍射

电磁波的衍射理论通常从球面波的 Fresnel-Kirchhoff 衍射公式出发, 根据几何结构, 作一系列近似, 就不同的近似程度, 分别得到 Fraunhofer 衍射和 Fresnel 衍射<sup>[1]</sup>。而对任意场空间分布的入射波, 没有直接的衍射分析。文献 [2] 以平面波通过有振幅透过率的小孔的衍射来处理这个问题。实际上, 就 Fraunhofer 衍射而言, 这个问题可以进行简明的直接分析。

根据 Helmholtz 和 Kirchhoff 积分原理, 设  $(\xi, \eta)$  为孔径平面的坐标,  $(x, y, z)$  为衍射区域的坐标, 入射到孔  $A$  上的光场为  $U^i(\xi, \eta)$ , 对衍射区  $P$  点的光场使用 Kirchhoff 近似有

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_A \left[ U^i \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{e^{iks}}{s} \right) - \frac{e^{iks}}{s} \frac{\partial U^i}{\partial z} \right] dS = \frac{1}{4\pi} \iint_A \left[ U^i \frac{e^{iks}}{s} \left( ik - \frac{1}{s} \right) \cos(z, s) - \frac{e^{iks}}{s} \frac{\partial U^i}{\partial z} \right] dS \quad (1)$$

式中  $s$  为孔径平面一点  $Q(\xi, \eta)$  到  $P$  点的距离。由于 Fraunhofer 衍射对应于光源和观察点离衍射孔为无限远的情况 (如平面波或准直高斯光束), 有或近似有  $\frac{\partial U}{\partial z} = ikU$ , 并认为  $\cos(z, s)$  在整个积分区域变化甚微, 设  $s'$  为孔径平面原点到  $P$  点的距离,  $\cos(z, s) \approx \cos(z, s') \approx 1$ , 则 (1) 式变为:

$$U(P) = -\frac{\cos(n, s')}{4\pi s'^2} \iint_A U^i e^{iks} dS \quad (2)$$

将距离  $s'$  近似为  $s \sim s' - \frac{x\xi + y\eta}{s'} + \dots = s' - (p\xi + q\eta) + \dots$ .

则 (2) 式变为:

$$U(P) = -\frac{\cos(n, s')e^{iks'}}{4\pi s'^2} \iint_A U^i e^{-iks(p\xi + q\eta)} dS = C \iint_A U^i e^{-iks(p\xi + q\eta)} dS \quad (3)$$

上式即 Fraunhofer 衍射的一般公式, 它将入射波的场直接包含在积分项中, 这样就可以用来计算各种场结构的波的衍射问题. 对应的光强为:

$$I(P) = U(P)^* U(P) \quad (4)$$

### 3 高斯光束的 Fraunhofer 圆环衍射

对于具有旋转对称几何的衍射问题, 可定义  $w = \sqrt{p^2 + q^2}$  为观测点与衍射孔对称轴之间夹角的正弦. 平面波经外半径为  $a$ , 内半径为  $\varepsilon a$  ( $0 \leq \varepsilon < 1$ ) 的圆环衍射的光强分布为:

$$I(x) = C \left[ \frac{2J_1(x)}{x} - \frac{2J_1(\varepsilon x)}{\varepsilon x} \right]^2 \quad (5)$$

这里  $C$  为常数, 无量纲  $x = kaw$ . 对于圆孔衍射, 光强第一级极小值之内的中心亮斑 (Airy 斑) 对应的角度范围称之为衍射极限, 此时  $x=3.833$ , Airy 斑的功率占总功率的 83.78%.

在实际测量中, 由于不可能在无穷大范围内求功率, 以及信号灵敏度的限制, 一般假定一定范围内的功率即为 (实测) 总功率, 而把具有 (实测) 总功率的 83.78% 的区域所对应的  $x$  值与 3.833 的商作为衍射极限倍数.

对于高斯光束, 我们用其在发射孔径处的束腰半径  $a_0$  与发射系统外半径的比值  $r = a/a_0$  来表示其结构, 该比值简称为口径束腰比. 本文选择  $r = 1/\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}$  三种情况, 对应于高斯光束经望远镜发射出去的功率 (仅就主镜而言) 分别占总功率的 63.2%、86.5% 和 98.2%.

对高斯光束经外半径为  $a$ , 内半径为  $\varepsilon a$  的圆孔衍射,

$$U(P) = 2\pi C \int_{\varepsilon a}^a e^{-\rho^2/a_0^2} J_0(k\rho w) \rho d\rho \quad (6)$$

考虑到实际望远镜的结构, 我们在以下的数值分析中, 考虑圆环内半径占外半径的 10%, 20%, 30% 的情况, 取  $x = 40$  以内的功率为总功率. 定义

$$L(x) = \frac{\iint_{x' \leq x} I(x') dS}{\iint_{x' \leq 40} I(x') dS} \quad (7)$$

为  $x$  以内的功率占总功率的百分比 (以下简称为相对环围功率). (6)、(7) 式的求解采取直接的数值运算, 计算光强分布时, 使用高斯积分公式, 节点达 1024, 计算积分光强时使用梯形公式, 所有运算都采用双精度, 所有这些措施使计算结果的准确性得到保证.

图 1 和图 2 分别绘出了高斯光束经圆孔和几种内外径之比的圆环衍射的相对光强分布 (以中心光强进行归一化) 和相对环围功率分布随口径束腰比的变化情况, 同时绘出了平面波的圆孔衍射的情况 (以  $PL(C)$  表示), 以资比较. 图 3 绘出了平面波和口径束腰比的高斯光束经圆孔和圆环衍射的相对光强分布和相对环围功率分布随内外径之比的变化情况. 从图中可以看出, 各种波型的圆环衍射的光强分布同平面波的圆孔衍射相仿, 也存在着中心亮斑, 我们不妨也称其为 Airy 斑.

各种情况下 Airy 斑半径及其相对环围功率列于表 1 ( $x$  值的精度为 0.05). 随圆环内外径之比的增大, 中心亮斑的尺度减小, 功率也减弱. 对于各种孔径, 高斯光束衍射的 Airy 斑半径及其相对环围功率随口径束腰比  $\gamma = 1$  的增大而增大, 并且都大于平面波的情况.

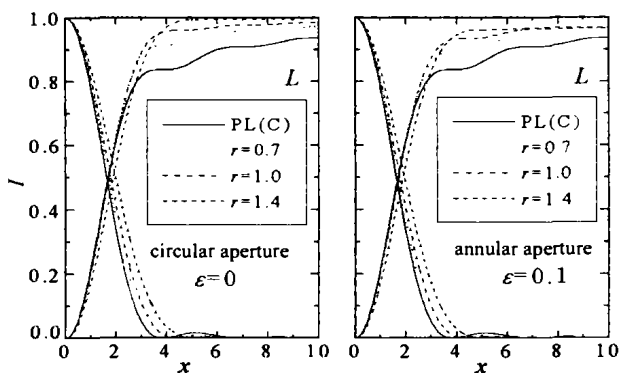


Fig.1 The relative intensity distribution and the relative power distribution of the diffraction patterns of Gaussian beams by a circular aperture (left) and an annular aperture with  $\epsilon=0.1$  (right)

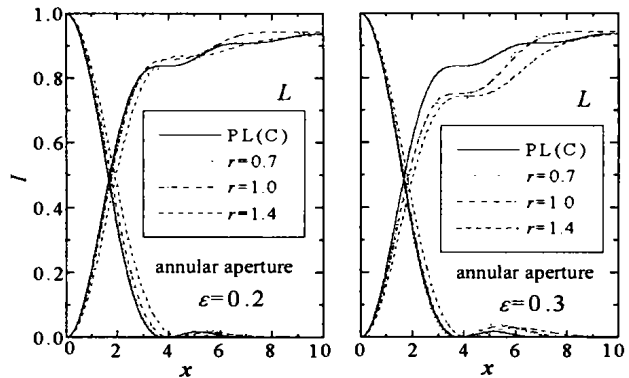


Fig.2 The relative intensity distribution and the relative power distribution of the diffraction patterns of Gaussian beams by annular apertures with  $\epsilon=0.2$  (left) and  $\epsilon=0.3$  (right)

### 4 光学质量因子的估算

正确地评价一个光学系统的质量, 应该针对其具体的几何结构和入射波型, 而实际应用中常以平面波的圆孔衍射作为标准。如遵从这一习惯, 我们不妨就本文所考虑的几种波型和孔径, 来估计一下这样求得的光学质量因子与真实值的出入。表 2 列出了对应于 83.78% 相对包围功率的  $x$  值。这些值与平面波 Airy 斑半径 (3.85) 的比值列于表 3。

表 3 的值表示对于该种波型和孔径, 光学质量因子将被误算的倍数。举例说明: 对口径束腰比为 1.0 的波型和圆孔, 光学质量因子将被低估 1.43 倍; 对平面波和内外径之比为 0.2 的圆环, 光学质量因子将被高估 1.36 倍。

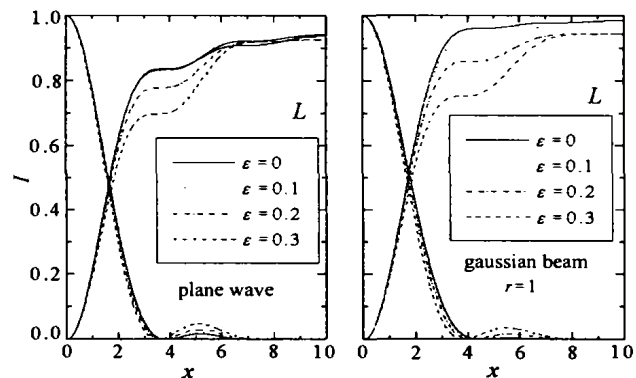


Fig.3 The relative intensity distribution and the relative power distribution of the diffraction patterns of a plane wave (left) and a Gaussian beam by annular apertures

Table 1 The radius and the fraction of energy contained in the radius of the first minimum of the Fraunhofer diffraction pattern of different waves by different apertures

Wave type	Aperture	Circular	Annular $\epsilon=0.1$	Annular $\epsilon=0.2$	Annular $\epsilon=0.3$
		$x$ $L(x)$	$X$ $L(x)$	$x$ $L(x)$	$x$ $L(x)$
Plane		3.85 83.78%	3.80 83.32%	3.65 77.94%	3.50 69.83%
Gaussian	$a/\omega = 0.707$	4.10 91.65%	4.05 89.46%	3.90 82.97%	3.65 73.44%
Gaussian	$a/\omega = 1.0$	4.50 95.97%	4.35 93.43%	4.10 85.95%	3.80 75.26%
Gaussian	$a/\omega = 1.414$	5.50 99.42%	5.20 96.15%	4.65 86.82%	4.15 74.46%

光学质量因子的被夸大或低估及其程度取决于具体的波结构和孔径结构。所以在对光学系统的实际评价中, 我们应作到两点: 1) 对于圆环结构要用圆环衍射结果; 2) 高斯光束不要当作平面波来处理, 而且还要确定高斯光束相对于发射口径的口径束腰比。这样才能得到正确的光学质量评价。

**Table 2** The radius corresponding to a 83.78% fraction of energy of the Fraunhofer diffraction pattern of different waves by different apertures

Aperture		Circular	Annular		
			$\varepsilon=0.1$	$\varepsilon=0.2$	$\varepsilon=0.3$
Plane		3.85	4.40	5.20	5.55
Gaussian	$a/\omega = 0.707$	2.75	2.85	4.60	5.50
Gaussian	$a/\omega = 1.0$	2.70	2.80	3.20	5.65
Gaussian	$a/\omega = 1.414$	2.95	3.05	3.45	6.45

**Table 3** The optical quality factor for the Fraunhofer diffraction pattern of different waves by different apertures, determined by a 83.78% fraction of energy of a plane wave diffraction by a circular aperture

Aperture		Circular	Annular		
			$\varepsilon=0.1$	$\varepsilon=0.2$	$\varepsilon=0.3$
Plane		1	1.14	1.36	1.44
Gaussian	$a/\omega = 0.707$	1/1.40	1/1.35	1.19	1.43
Gaussian	$a/\omega = 1.0$	1/1.43	1/1.38	1/1.20	1.47
Gaussian	$a/\omega = 1.414$	1/1.31	1/1.26	1/1.16	1.68

### 参 考 文 献

- 1 Born M, Wolf E. *Principles of Optics* [M]. Oxford: Pergamon Press, 1980. 375~401
- 2 Ghatak A K, Thyagarajan K. *Contemporary Optics* [M]. New York: Plenum Press, 1978. 124~129

## Annular Fraunhofer Diffraction of Gaussian Beams and Optical Quality Evaluation of a Laser Emitting System

Rao Ruizhong

( Laboratory of Atmospheric Optics, Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics,  
Chinese Academy of Sciences, Hefei 230031 China )

**Abstract** The diffraction formula for an arbitrary wave by small aperture is used to calculate the intensity and power distribution for the diffraction pattern of some Gaussian beams by several annular apertures. The errors of the optical quality factor evaluated on the base of the diffraction by circular apertures are evaluated for optical systems with annular apertures. It is concluded that the wave type and aperture geometry have to be taken into account in evaluating the optical quality of an optical system.

**Key words** diffraction, Gaussian beam, optical quality

饶瑞中 (1963 - ), 男, 博士, 研究员. 主要从事激光大气传播、大气辐射传输等研究工作.