

文章编号: 1001-3806(2002)02-0097-05

光波波前位错与相位间歇性——I 结构理论*

张逸新 朱拓 徐振源

龚知本

(无锡轻工大学计算科学与信息传播系, 无锡, 214036) (中国科学院安徽光学精密机械研究所, 合肥, 230031)

摘要: 综述了光学中波前位错和间歇问题的研究现状。其中包括随机介质中传播或被粗糙表面散射标量波场的波前位错现象的概念、规律和研究方法, 以及大气自适应光学系统的相位间歇现象等理论与实验研究。

关键词: 自适应光学; 相位位错; 相位间歇

中图分类号: TN011 **文献标识码:** A

Dislocation and branch point in optical front——I structure theory

Zhang Yixin, Zhu Tuo, Xu Zhenyuan

(Department of Computing Science & Information Communication, Wuxi University of Light Industry, Wuxi, 214036)

Gong Zhiben

(Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Hefei, 230031)

Abstract: The recent developments on phase dislocation and branch point in optics are reviewed. It includes the conception, law and study method of wave front dislocation in scalar waves scattered by rough surface and propagate through random media and phenomena of the branch point in a daptive optics.

Key words: adaptive optics; phase dislocation; phase branch point

引言

自适应光学系统是纠正湍流大气引起光波相位起伏的有效方法之一。然而, 随着自适应光学纠正光波相位畸变方法研究的深入, 人们发现, 在自适应补偿技术的波阵面探测中, 存在着所谓的“相位间歇”现象, 由于“相位间歇”的出现使得波阵相位无法精确确定, 从而导致自适应系统的畸变波纠正效率受到较大的限制。故克服“相位间歇”效应是自适应补偿技术发展中必须解决的问题。那么, 这种“相位间歇”性的规律和机制是什么, 正是目前该领域正在研究的课题。笔者从标量波传输波前位错和光波大气传输时出现的“相位间歇”二个方面综合论述了当前该方向的研究动态。

1 标量波波阵面位错研究

相位间歇性的概念最早是由英国学者 Nye 等

* 国家八六三计划大气光学重点实验室基金和教育部高等学校骨干教师计划资助项目。

作者简介: 张逸新, 男, 1956年2月出生。硕士, 教授。现从事激光湍流大气传输、图像处理 and 光束扫描等方面的研究工作。

收稿日期: 2001-05-25; 收到修改稿日期: 2001-05-29

人^[1]提出的。此现象是他们在研究冰面反射超声回波的特性时发现的, 在实验中, 他们发现经冰面反射的回波的波阵面存在着类似于晶面位错的相位位错线 (dislocation), 故称之为相位位错。

1.1 波前位错概念

设某一给定点的波场可用复标量函数 $u(\vec{r}, t)$ 表示: $u(\vec{r}, t) = A(\vec{r}, t)e^{is(\vec{r}, t)}$ (1) 式中, $A(\vec{r}, t)$ 是振幅, 而 $S(\vec{r}, t)$ 是相位。因为 $u(\vec{r}, t)$ 是处处解析的, 所以, 相位 $S(\vec{r}, t)$ 除了 $u(\vec{r}, t) = 0$ (即 $A(\vec{r}, t) = 0$) 以外, $S(\vec{r}, t)$ 是确定的。为此定义复分布 $u(\vec{r}, t)$ 为 0 的空间轨迹定义为波前位错^[2], 换言之, 波的振幅 $A(\vec{r}, t)$ 为 0 而 $S(\vec{r}, t)$ 不确定的点构成的轨迹称为波前位错。我们知道, 在某一给定时刻 t , 方程 $\text{Re}u(\vec{r}, t) = 0$ 和 $\text{Im}u(\vec{r}, t) = 0$ 定义的平面系在空间相交构成线系, 所以, 位错系即是一个线系。随着时间演变, 这些线描出的面称为位错轨迹。

为讨论方便起见, 设波速为 c_0 的波在均匀和非色散介质中传播, 其满足的波动方程为:

$$c_0^2 \nabla^2 u = \partial^2 u / \partial t^2 \quad (2)$$

上式最简单的位错波解为^[1]:

$$u(x, y, z, t') = A_0 \{ \beta(k_0 x - \omega_0 t') + i k_0 y \} \times$$

$$\exp[i(k_0x - \omega_0t')] \quad (3)$$

式中, $k_0 = \omega_0/c_0$, A_0 和 β 是实常数。平行于 ox 的位错线在 $t = t_0$ 时刻到达原点 o , t' 是新零点记时点: $t' = t - t_0$ 。

比较(3)式和(1)式可得出位错位相:

$$S = k_0x - \omega_0t' + \tan^{-1} \left\{ \frac{k_0y}{\beta(k_0x - \omega_0t')} \right\} \quad (4)$$

式中, \tan^{-1} 是 $|\beta(k_0x - \omega_0t') + ik_0y|$ 的变量, 可在四个象限内的任一个象限内取值。在下面处理中, 把 S 看作为连续多值函数。图 1 表示 $t' = 0$ 处的等相线; 随着时间推移, 图形平行于 ox 以速率平移, 并且 c_0 和相位符号不变。

具有位错结构的波阵面可以用 3 种不同尺度的结构描述。第 1 种结构为核结构(图 1b), 它是由接近于原点 o 的和由 $\tan^{-1}(y/\beta x)$ 描述的径向射线型等相线构成。除 $\beta = 1$ 外, 此类等相线的相位随极角不均匀单调变化, 并且以 2π 的分辨率增加或减小。第 2 类结构为局地结构。这类结构由略偏离原点的曲线型等相线构成(图 1c), 由此图可以看到, 除了沿正或负轴的直线以外, 等相线是由向下弯曲的曲线构成的。第 3 类结构称为波结构, 这是一种大尺度结构(图 1a)。由图可看到, 起始且沿 $-oy$ 轴的直线型相线($3\pi/2$) 构成用晶体学术语命名的“超半平面”, 同时, 也可以看到起始且沿 oy 轴的等相线通过相位鞍点 S 点。特别有意义的是这两类直相线通过原点 o , 它们与通过 o 点的相线重合, 此结论可以在反正切为 0 的条件下得出, 换言之, 这些相线的方向表示了无位错波 $\exp[i(k_0x - \omega_0t')]$ 的方向。

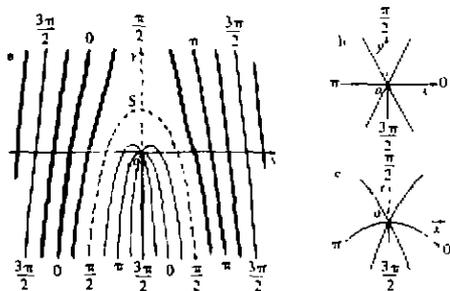


图 1 当 $t' = 0$ 时的等相线

a—大尺度结构 b—核结构 c—局地结构

因为(3)式中的扰动的幅度随着偏离原点 o 的距离的增加而无限限制的线性增加, 故所描述的结构虽然是波动方程的精确解, 但是应看作是物理波的局域近似。Nye 和 Berry^[1] 从理论上在 $\exp[i(k_0x - \omega_0t')]$ 线性调制因子中引入非线性项, 此结果不仅

反映了各个位错线的爬行和滑移, 并且描述了不同位错线间相互作用, 这些位错可以相互碰撞, 重新组合或相互消失或成对产生。

1.2 波前位错一般理论

一般情况下, 位错场可以表达为:

$$u(\vec{r}, t') = A(\vec{r}, t') \exp[iS(\vec{r}, t')] \quad (5)$$

设 $A(0, 0) = 0$, 且在位错轨迹上选择任意起始点 o , 设位错线 $t = t_0$ 在通过 o 点且 $t' = 0$ 。类似于(3)式可以把上式表示为:

$$u(\vec{r}, t') = F(\vec{r}, t') \exp[i(\vec{k}_m \cdot \vec{r} - \omega_0t')] \quad (6)$$

式中, $F(\vec{r}, t')$ 是平面波的权重函数, 它是一个复函数。为了确保函数的单值性, 利用接近 o 点时相位 $S(\vec{r}, t')$ 的时间和空间变化率有限这一特点, 定义平面波波矢 \vec{k}_m 和频率 ω_0 。在 o 点相位 S 本身是不确定的, 但是波阵面当通过 o 点一次产生 π 相位跳跃, 不过其在接近零的变化率是确定的。进一步设定 $\vec{r} = 0$ 和 $t' \rightarrow 0$ 时 $-\partial S/\partial t'$ 的极限为 ω_0 。

在选择坐标系 $oxyz$ 中, 设 ox 轴与位错线相切, oy 轴正交于位错轨迹, 那么 \vec{k}_m 定义了一个矢量其 x, y, z 分量为

$$\begin{aligned} k_x &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_{y=z=0}, k_y = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)_{x=z=0}, \\ k_z &= \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)_{x=y=0} \end{aligned} \quad (7)$$

在 $t' = 0$ 处, 上述极限与 3 个轴的方向近似一致。 S 在 o 点处的极限值表示此值与其所接近方向的选择有关。而所定义的平面波 $\exp[i(\vec{k}_m \cdot \vec{r} - \omega_0t')]$ 不再是波动方程的解, 因为其不是以速度 c_0 移动。

当两条位错线之间的相位在时空或空间上变化的量级是 2π 的整数倍时, 这种位错称之为“孤立”位错。如果两位错线在空-时距离上相距较远, 同时, 对 $F(\vec{r}, t')$ 作线性近似则可以给出波结构的合适关系^[1]。仅考虑空间位置变化, 对于两个滑移位错而言, 这种波结构可以写成:

$$u = \{ Ak_0y + k_0^2y^2 + iB(k_0x - \omega_0t') + ik_0x \} \times \exp[i(k_0x - \omega_0t')] \quad (8)$$

取 $t' = 0$, 则位错线位于 $(0, 0)$ 和 $(0, -A/k_0)$ 。随着 $A \rightarrow 0$, 位错线相互靠近, 由此可以认为, 当 $A = 0$ 时两个位错线重合; 而 $a = 0, t' = 0$ 和 $x = 0$ 时, 因 F 的线性近似为 $Ak_0y + k_0^2y^2$ 而失效。在 $A \gg 1$ 的极限下, 线性近似较好地表示了等相结构。

1.3 位错种类

方程(8)中的相位为:

$$S(\vec{r}, t') = k_x x + k_y y + k_z z - \omega_0t' +$$

$$\tan^{-1} \left| \frac{b(x - vt') + dy}{a(x - vt') + cy} \right| \quad (9)$$

在 $t' = 0, z = 0$ 处,核结构为:

$$S = \tan^{-1} |(bx + dy)/(ax + cy)| \quad (10)$$

其决定了 S 增加时的旋度。在右手系中 $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ 行列式的正与负决定了沿 oz 轴的顺时还是逆时旋度。类似于轴矢量,旋度与所选定轴无关,只要位错不退化,旋度是守恒的。

$S(\vec{r}, t')$ 仅有的 z 相关量是 $k_z z$, 如果 $k_z \neq 0$, $k_z z$ 增加的方向和旋度决定了空间螺旋性。从一

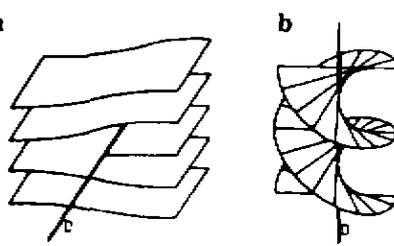


图 2 纯刃与纯螺旋位错
a—纯刃位错 b—纯螺旋位错

般意义上来说,除了 $k_z = 0$,位错是左旋或右旋的。假使在(8)式中取 $k_z = 0$,则得出纯刃型位错(见图 2a);而取 $k_x = \pm |\vec{k}_m|$,则位错称为纯螺旋位错(见图 2b)。不确定情况称为混合刃和螺位错。所以 $k_z / |\vec{k}_m|$ 是位错旋度 \vec{k}_m 的量度。方向与晶体学中 Burgers 矢量的方向类似。纯刃和纯螺型的位错对应于 \vec{k}_m 正交和平行于位错线。

1.4 位错强度^[2]

如前所述,波前位错与 (\vec{r}, t) 空间满足 $A(\vec{r}, t')$ 的相联系,因此,在 t 确定的二维空间 (x, y) 内波前位错是二维奇异点,而在 (x, y, z) 三维空间它们是奇异线。

位错奇异性具有如下特征,当通过围绕位错封闭路径一周,相位改变 $2\pi n$ 。 n 是整数被定义为位错强度。为说明这一点,设 $u(\vec{r}, t')$ 是时-空坐标到复平面的映像。位错映射为原点。在时-空图中的封闭曲线 C 映射为复平面内的 C' 闭合曲线。 C' 将绕原点整数次,这是一个单位为 2π 的数, C 连续变化则 C' 也是连续变化的。由 C' , 绕原点绕行产生的倍数仅当 C' 包含原点时才改变,即 C 通过位错波前。如果限制回路不与位错相交,那么所有拓扑等价回路 C 的值 n 相同。因此,位错强度 n 是拓扑不变量。

可以证明位错没有端点,理由是:如果时-空空间内回路没有通过位错点或线,则其不收缩于位错点,这意味着虚回路 C' 收缩于非原点。所以,位错形成闭合回路。假如 C' 绕位于原点的极点 $(1/u) n$

次等价于 C 绕位错点一次,那么位错强度定义为:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{du(\vec{r}, t')}{u(\vec{r}, t')} \quad (11)$$

波通过二个依次排列同态波前,波函数相位增加 2π , 所以沿某一路径 P 运动,相位改变 $2m\pi$, 则必然通过 m 个波前,如图 3, $m = 3$ 。假使路径是闭合的,例如图 3 中的 Q 路径,则路径必然通过 m 个波前。所以有位错强度 n 与 m 个波前的刃。

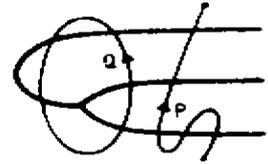


图 3 通过一组波前的路径
相位改变 $2m\pi$, 则必然通过 m 个波前,如图 3, $m = 3$ 。假使路径是闭合的,例如图 3 中的 Q 路径,则路径必然通过 m 个波前。所以有位错强度 n 与 m 个波前的刃。

1.5 标量波波阵面位错研究现状

随着 Nye 等人^[1,2]波相位位错概念的提出,各国学者对此问题进行了大量的研究而逐步形成了奇点光学分支^[1~17]。其中 Freund 通过一系列论文对此进行了深入分析,内容涉及光波前位错的定位^[3](由于光波波前在复平面内随光波传播是旋转的,所以也常称光学波前位错的“光学涡”),高斯型随机光波场的光学涡统计概率密度^[4];高随机度介质中传输光波的波前位错分布网络^[5]和相图(phase map)上位错的“正”和“负”拓扑荷的定义^[5]和相关性研究^[6]等。Conllet 等人^[9,10]从理论和实验上研究了计算机合成全息衍射场和非线性二次谐波的螺旋位错。Nye 等人研究了偏振光的位错结构^[11], Masajada 等人^[12]研究了二维衍射场的位相奇点规律, Berry^[13]研究了高斯分布不相干和准单色波的位错分布。指出散斑光场的振幅极大,极小及鞍点是波场梯度的拓扑奇点^[14]。Baranova 等人^[15]从理论和实验中研究了光学自适应补偿过程中存在的位错现象,指出存在波前位错的光波使得柔性自适应镜不能产生理想共轭波;Scivier 采用多维 Fourier 变换研究了多维带限函数的零点和相位不确定规律,用相位间歇性(branch cut)的概念描述位错现象。Angelsay 等^[16]则从概念上指出两束波前光滑的简单波干涉也会产生螺旋位错,位错发生在等振幅波干涉极小和两光束交叉线处。Aksenou 等人^[17]则从理论上指出可以通过测量光强分布束测量相位奇异点和潜在相位,达到确定螺旋位错中心位置的目的。

2 湍流大气中传输光波的相位间歇性

从上节的讨论可以知道,光波在随机介质中传播,被粗糙界面反射,干涉等都会产生波前位错现象。湍流大气也是一种随机介质,光波通过湍流大气传播时一定也会存在波前位错现象^[18], Fried 称

之为 branch cut^[19], 下面讨论中也称之为相位间歇。

为了分析讨论的方便, 下面先定义两个术语: 定义孤立零振幅点的螺旋错类相位奇点为单涡旋, 而对于成对出现的零振幅点的涡旋, 它具有相反拓扑荷的性质^[7], 它们产生的总体相位奇点类似于两个负号相反相距一定距离的单涡旋的叠加, 这类奇点定义为相位间歇点。

在相位间歇问题的研究中, 人们常在(1)连续变量形式; (2)采样空间形式; (3)采样空间矩阵形式等 3 种不同的表示形式中研究同一个问题。假设 $f(\vec{\rho})$ 表示位置 $\vec{\rho}$ 处的某一物理量, $\vec{\rho} = (x, y)$, 则在采样空间表示形式中, 采用位于 $\vec{\rho}_{p,q}$ 位置的 $f(\vec{\rho}_{p,q})$ 表示连续形式 $f(\vec{\rho})$, $\vec{\rho}_{p,q}$ 表示二维均匀采样点阵, 其有 x 和 y 方向的位置分量, 采样点元数为 $(p, q) \times d$, p 和 q 是整数, d 是采样点间距。至于如果用采样点阵来表示则把 $f(\vec{\rho}_{p,q})$ 记为 f 。应该注意 f 是这些值的列矩阵或行矩阵列。这些矩阵元的矩对应于采样空间表示形式中的 $f(\vec{\rho}_{p,q})$ 值。假定被采样值 $f(\vec{\rho}_{p,q})$ 是矢量(具有两个或 3 个分量), 每个分量可分解为列矩阵或行矩阵 f 。因此如果采样空间有 N^2 个样品点和 $f(\vec{\rho}_{p,q})$ 是二维矢量, 那么列矩

$$\vec{g}(\vec{\rho}_{p,q}) = \frac{p[S(\vec{\rho}_{p+1,q}) - S(\vec{\rho}_{p,q})]}{d} \hat{x} + \frac{p[S(\vec{\rho}_{p,q+1}) - S(\vec{\rho}_{p,q})]}{d} \hat{y} \quad (13)$$

式中, $p[\dots]$ 表示主值, 如用连续变量形式表示, 则记为: $\vec{g}(\vec{\rho}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{p[S(\vec{\rho} + \hat{x}\delta) - S(\vec{\rho})]}{\delta} \right\} \hat{x} + \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{p[S(\vec{\rho} + \hat{y}\delta) - S(\vec{\rho})]}{\delta} \right\} \hat{y} \quad (14)$

上式之所以采用 $\delta \rightarrow 0$ 的极限形式是由于波前存在

$$\vec{g}(\vec{\rho}_{p,q}) = d^{-1} \left[\tan^{-1} \left(\frac{\text{Im}\{u[(p+1)d, q]u^*(pd, q)\}}{\text{Re}\{u[(p+1)d, q]u^*(pd, q)\}} \right) \right] \hat{x} + d^{-1} \left[\tan^{-1} \left(\frac{\text{Im}\{u[pd, (q+1)d]u^*(pd, q)\}}{\text{Re}\{u[pd, (q+1)d]u^*(pd, q)\}} \right) \right] \hat{y} \quad (15)$$

与(14)式对应的连续变量形式方程可写为:

$$\vec{g}(\vec{\rho}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\delta^{-1} \tan^{-1} \left(\frac{\text{Im}\{u(\vec{\rho} + \hat{x}\delta)u^*(\vec{\rho})\}}{\text{Re}\{u(\vec{\rho} + \hat{x}\delta)u^*(\vec{\rho})\}} \right) \right] \hat{x} + \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\delta^{-1} \tan^{-1} \left(\frac{\text{Im}\{u(\vec{\rho} + \hat{y}\delta)u^*(\vec{\rho})\}}{\text{Re}\{u(\vec{\rho} + \hat{y}\delta)u^*(\vec{\rho})\}} \right) \right] \hat{y} \quad (16)$$

如前面的分析, 假使光场存在 branch point, 那么绕间歇点轨道上主值梯度值的和等于 $\pm 2\pi$ 。如用采样空间表达法, 则可记为:

$$\vec{g}(\vec{\rho}_{p,q}) \cdot \hat{x}d + \vec{g}(\vec{\rho}_{p+1,q}) \cdot \hat{y}d - \vec{g}(\vec{\rho}_{p,q+1}) \cdot \hat{x}d - \vec{g}(\vec{\rho}_{p,q}) \cdot \hat{y}d = \begin{cases} \pm 2\pi \\ 0 \end{cases} \quad (17)$$

与(17)式对应的围路由角点位置为 $\vec{\rho}_{p,q}$, $\vec{\rho}_{p+1,q}$, $\vec{\rho}_{p,q+1}$ 和 $\vec{\rho}_{p,q}$ 的矩形构成。式中的“-”号是考虑到沿矩形移动的方向逆 \hat{x} 到 \hat{y} 而引入的。用连续空间表示法, 则

阵 f 有 $2N^2$ 个元。

设 $u(\vec{\rho})$, $u(\vec{\rho}_{p,q})$ 和 u 分别为被湍流大气干扰的场, $S(\vec{\rho})$, $S(\vec{\rho}_{p,q})$ 和 S 分别表示此场相位的主值。它们分别由下列方程定义:

$$S(\vec{\rho}) = \tan^{-1} \left\{ \frac{\text{Im}[u(\vec{\rho})]}{\text{Re}[u(\vec{\rho})]} \right\} \quad (12)$$

$$S(\vec{\rho}_{p,q}) = \tan^{-1} \left\{ \frac{\text{Im}[u(\vec{\rho}_{p,q})]}{\text{Re}[u(\vec{\rho}_{p,q})]} \right\}$$

上式由 \tan^{-1} 得出的相位值限于 $-\pi$ 到 π 的主值区。列矩阵 S 的值等于相对应的 $S(\vec{\rho}_{p,q})$ 。

我们希望至少在采样误差范围内 $f(\vec{\rho})$, $f(\vec{\rho}_{p,q})$ 和 f 的数值是相等的, 为了在相位差测量中达到此目的, 采用主值相位梯度的概念, 并用二维矢量 $\vec{g}(\vec{\rho})$ 和 $\vec{g}(\vec{\rho}_{p,q})$ 矩阵形式表示, 用 g 表示标量分量的列矩阵, 每一个标量分量等于 $\vec{g}(\vec{\rho}_{p,q})$ 元的 x 或 y 分量。应该注意, 因 $\vec{g}(\vec{\rho}_{p,q})$ 是二元矢量, 而 $S(\vec{\rho}_{p,q})$ 是标量, 故列矩阵 g 的 $\varphi(\rho)$ 元数通常是列矩阵 S 的两倍。用采样表示形式, 梯度主值由下列方程定义:

branch point, 所以无法定义 $S(\vec{\rho})$ 使其在每一点都连续。此外(13)式采用主值的目的是使理论计算值与实际测量值相一致。如果自适应波前传感器作为剪切干涉仪, 则可用下列方程计算主值相位梯度:

$$\oint_C d\xi \vec{i}(\xi) \cdot \vec{g}[\vec{\rho}(\xi)] = \begin{cases} \pm 2\pi \\ 0 \end{cases} \quad (18)$$

式中, ξ 定义为轨道 C 上位置 $\vec{\rho}(\xi)$ 的参量, $\vec{i}(\xi)$ 是回路的单位切向矢量。 $\vec{i}(\xi)d\xi$ 对应于回路上 ξ 到 $\xi + d\xi$ 区间的长度。

在自适应光学中通常用最小的均方误差波前重构器, 此最小均方误差波前重构器通常是矩阵算子 \mathcal{R} , 此算子乘于测量主值梯度列矩阵 g 得出重构相位, 把它记为 $S_{\text{lmse}} = \mathcal{R}g$ (19)

用空间采样形式表示时, 把 S_{lmse} 记为 $S_{\text{lmse}}(\vec{\rho}_{p,q})$,

而其连续函数表示形式为 $S_{\text{lmse}}(\vec{\rho}_{p,q})$ 。

重构算子矩阵 \mathcal{R} 由下列方程得出

$$\mathcal{R} = (\mathbf{\Gamma}^T \mathbf{\Gamma})^{-1} \mathbf{\Gamma}^T \quad (20)$$

$\mathbf{\Gamma}$ 是一个把相位值的列矩阵转换为相位差值列矩阵的矩阵。这里相位差是邻域位置点之间的相位差。邻域位置点的意思是沿 x 轴和 y 轴采样形成的空间点偶。矩阵 $\mathbf{\Gamma}$ 不仅给出了相位间差值,而且得出相位差除以相应邻域位置间距 d 的值,用采样的观点即得出相位的导数。因此, $\mathbf{\Gamma}$ 可以认为是一个梯度算子。

由积分 stoke's 定理, 方程(18)写为:

$$\int_c^d \vec{\rho} \cdot \nabla \times \vec{g}(\vec{\rho}) = \begin{cases} \pm 2\pi & \text{含间歇点} \\ 0 & \text{不含间歇点} \end{cases} \quad (21)$$

由上式 $\vec{g}(\vec{\rho})$ 的旋度不为 0 表示存在着相位间歇现象。设积分环路包含区域足够小, 在环路内只有单个间歇点, 则积分可以用中心位于间歇点 $\vec{\rho}_{bp}$ 的 Dirac delta 函数表示, 那么:

$$\vec{z} \cdot \nabla \times \vec{g}(\vec{\rho}) = \pm 2\pi \delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}_{bp}) \quad (22)$$

考虑到梯度的旋度等于 0, 故 $\vec{g}(\vec{\rho})$ 不能简单认为是某一标量函数的梯度, 即矢量函数 $\vec{g}(\vec{\rho})$ 不等于标量势函数的梯度。但可把矢量函数 $\vec{g}(\vec{\rho})$ 表示为标量势的梯度与矢势 $\mathbf{H}(\vec{\rho})$ 的旋度之和, 即^[19]:

$$\vec{g}(\vec{\rho}) = \nabla \Phi(\vec{\rho}) + \nabla \times \mathbf{H}(\vec{\rho}) \quad (23)$$

因为 $\vec{g}(\vec{\rho})$ 只有两个平行与 x 和 y 轴的分量, 所以矢势 $\mathbf{H}(\vec{\rho})$ 只有 z 分量, 即:

$$\mathbf{H}(\vec{\rho}) = [0, 0, h(\vec{\rho})] \quad (24)$$

$\mathbf{H}(\vec{\rho})$ 称为 Hertz 势, $h(\vec{\rho})$ 称为 Hertz 函数。

考虑(23)式和(22)式, 并利用矢量理论, 可得:

$$\nabla^2 h(\vec{\rho}) = \mp 2\pi \delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}_{bp}) \quad (25)$$

不失一般性, 设间歇点位于原点, 即设 $\vec{\rho}_{bp} = 0$, 由此假定我们认为方程(26)式的解为:

$$h(\vec{\rho}) = \mp \log(r) \quad (26)$$

式中, $r = |\vec{\rho}|$ 。把(26)式代入(25)式, 易证(26)式是(25)式的解^[18]。根据间歇点是相位奇点的数学要求, 可进一步证明解在接近间歇点邻域具有 delta 类函数的性质^[18]。作为推广把(26)式推广为:

$$h(\vec{\rho}) = \mp \log(|\vec{\rho} - \vec{\rho}_{bp}|) \quad (27)$$

注意到在采样空间表达时, $\mathbf{\Gamma}$ 可看作梯度算子的采样数据近似, 所以 $\mathbf{\Gamma}^T$ 可看作散度算子的采样数据近似。由(19)式和(20)式, 以及考虑到旋度的散度处处为 0, 故可以认为矢量势 $\mathbf{H}(\vec{\rho})$ 对波前重构无贡献, 因此, 最小均方误差重构相位 $S_{\text{lmse}}(\vec{\rho}_{p,q})$ 等于标量势 $\Phi(\vec{\rho})$ 。

虽然矢量势对重构相位 $S_{\text{lmse}}(\vec{\rho}_{p,q})$ 没有贡献,

我们仍把它看作光场 $u(\vec{r})$ 的相位 $S(\vec{\rho})$ 的一个部分^[19], 理由是它是相位梯度 $\vec{g}(\vec{\rho})$ 的一部分, 相位梯度 $\vec{g}(\vec{\rho})$ 的这一部分可认为是由 $u(\vec{\rho})$ 或 $S(\vec{\rho})$ 直接得出的。所以, 由此可得出结论与 $u(\vec{\rho})$ 相应 $S(\vec{\rho})$ 的这一部分对应于最小均方误差重构算子 \mathcal{R} 而言是“不可见”的。Fried^[19] 称此相位为“隐蔽”相位, 并定义为形变光场 $u(\vec{\rho})$ 的相位 $S(\vec{\rho})$ 与最小均方误差重构相位 $S_{\text{lmse}}(\vec{\rho})$ 的差。记“隐蔽”相位为 $S_{\text{hid}}(\vec{\rho})$, 即 $S_{\text{hid}}(\vec{\rho}) = S(\vec{\rho}) - S_{\text{lmse}}(\vec{\rho})$ 用采样空间表示法为 $S_{\text{hid}}(\vec{\rho}_{p,q})$, 矩阵表示法则为 S_{hid} 。

“隐蔽”相位值的得出十分简单。由于最小均方误差重构相位与标量势相关, 因此, 重构相位的梯度等于标量势的梯度, 那么“隐蔽”相位的梯度与矢势的旋度相关连。考虑到 Hertz 势的旋度, 隐蔽相位对 x 的导数等于 Hertz 函数对 y 的导数和隐蔽相位对 y 的导数等于 Hertz 函数对 x 的导数。由 Cauchy-Riemann 条件, 形式上隐蔽相位是解析函数的虚部, 而是解析函数的负实部。前面我们曾指出 Hertz 函数是到达间歇点距离的自然对数, 那么如果间歇点位于 (x_{bp}, y_{bp}) , 解析函数是 $(x - x_{bp}) + i(y - y_{bp})$ 自然对数的负或正值, 而隐蔽相位是此函数的虚部。详细理论研究结果见下期的第 II 部分。

参 考 文 献

- [1] Nye N F, Berry M V. Proc R Soc Lond A, 1974, A336: 165 ~ 190.
- [2] Wright F J. Wavefront dislocations and their analysis using catastrophe theory, Structural stability in Physics. Berlin Springer, 1979.
- [3] Freund I. Opt Commun, 1997, 137: 118 ~ 126.
- [4] Freund I. J O S A, 1994, A11(5): 1644 ~ 1652.
- [5] Freund I, Shvartsman N, Freilikher V. Opt Commun, 1993, 101(3, 4): 247 ~ 264.
- [6] Freund I. Waves in Random Media, 1998, 8(1): 119 ~ 158.
- [7] Freund I. Opt Commun, 1999, 159: 99 ~ 117.
- [8] Freund I. Opt Commun, 1999, 163: 230 ~ 242.
- [9] Coulet P, Gil L, Rocca F. Opt Commun, 1989, 73(5): 403 ~ 408.
- [10] Arecchi F T. Phys Rev Lett, 1991, 67(27): 3749 ~ 3752.
- [11] Nye J F, Hajnal J V. Proc R Soc Lond A, 1987, A409: 21 ~ 36.
- [12] Masajada J. Opt Commun, 2000, 175: 289 ~ 294.
- [13] Beery M V. J Phys A: Math Gen, 1978, 11(1): 27 ~ 37.
- [14] Freund I. Phys Lett, 1995, A198: 139 ~ 144.
- [15] Baranova N B, Mamaev A V, Pilipetsky N F. J O S A, 1983, 73(5): 525 ~ 52.
- [16] Angelsky o, Besaha R, Mokhum I. SPIE, 1997, 3317: 97 ~ 100.
- [17] Aksenov V, Banakh V, Tikhomirova O. Appl Opt, 1998, 37(21): 4536 ~ 4550.
- [18] Fried D L, Vaughn J L. Appl Opt, 1992, 31(15): 2865 ~ 2882.
- [19] Fried D L. J O S A, 1998, A15(10): 2759 ~ 2768.